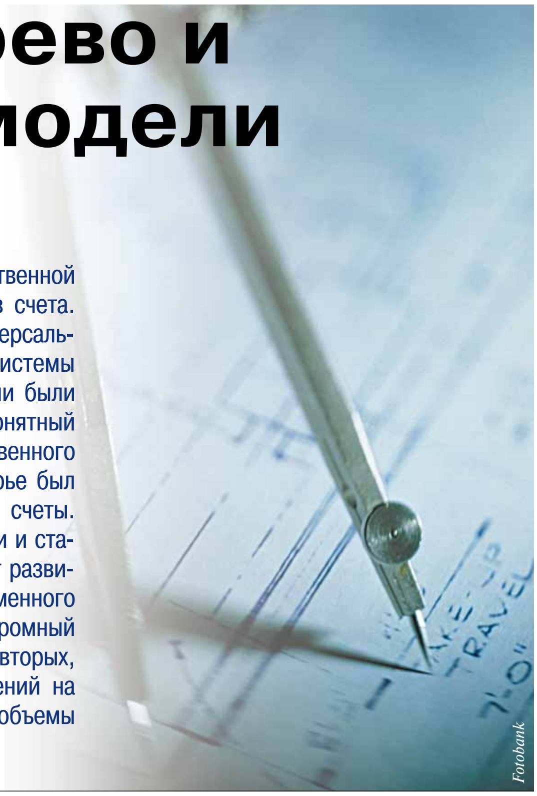
Биномиальное дерево и многопериодные модели биржевых цен



Fotobank

Математика зародилась в глубокой древности в ответ на запросы хозяйственной практики. Развитие операций обмена товарами требовало развития методов счета. Известно, что древние для счета использовали пальцы рук и ног. Это был универсальный компьютер древности. Народы мира разработали разнообразные системы исчисления и нумерации. Однако у всех народов мира операции над числами были одинаковые. Равенство 2+2=4 – это универсальный язык, одинаково хорошо понятный бушмену и эскимосу. С другой стороны, вычисления – это тяжелый вид умственного труда. Для облегчения вычислительных процедур в античном Средиземноморье был изобретен абак, а в древнем Китае – суан-пан, хорошо известные в России счеты. В Древней Греции математика впервые была отделена от хозяйственной жизни и стала самостоятельной наукой. Сегодня, спустя две с половиной тысячи лет, круг развития замыкается, и математика снова становится важным компонентом современного бизнеса. Это вызвано двумя причинами. Во-первых, математика накопила огромный арсенал мощных инструментов для исследования практических задач. Во-вторых, развитие компьютеров делает возможным переложить всю тяжесть вычислений на информационные комплексы, которые собирают и обрабатывают огромные объемы информации в реальном масштабе времени.

Бедные монегаски и польза морских купаний

Его сиятельство, светлейший князь Карл III Гримальдийский, потомственный повелитель славных и храбрых монегасков, постоянно нуждался в деньгах. В мировой истории благородные монегаски издавна были известны как очень отважный, находчивый и воинственный, но чрезвычайно бедный народ. Княжество не обладало ни достойными природными ресурсами, ни развитой промышленностью, ни торговлей. Море и немного скалистого побережья вокруг удобной гавани, которая была известна еще финикийским купцам в глубокой древности – вот и все, чем наследственно владел светлейший князь. Однако, несмотря на неблагоприятные экономические обстоятельства в княжестве, его сиятельство никогда не сидел сложа руки, а всегда мудро и деятельно руководил своими верными подданными. Ловко используя выгоды своего географического положения, постоянно интригуя и пользуясь возникающими противоречиями между основными политическими игроками в Европе того времени, князь монегасков изредка получал международные займы от крупных европейских держав. Однако полученных денег всегда не хватало на содержание княжеского двора и армии, которое было бы достойно знатности древнего рода Гримальди. Княжеская казна большую часть времени была абсолютно пуста, а государственный бюджет постоянно имел огромный дефицит.

Судьбоносное событие в истории этой самой захудалой европейской монархии случилось в 1861 году. Карл III продал концессию на безымянную скалистую гору к северу от мыса Сент-Антуан известному французскому олигарху и крупному международному спекулянту Морису Блану, человеку с сомнительным прошлым, создателю никому не известного акционерного «Общества морских купаний». С высоты массива диких скал, сложенных розовыми доломитами и покрытых непроходимым маквисом – зарослями вечнозеленых колючих кустарников: дикой фисташки и маслины, мирта и можжевельника, открывался чудесный вид на бескрайнюю лазурь моря, над которой высоко сиял ослепительно голубой свод небес. Под жгучим средиземноморским солнцем многочисленные горные ручьи быстро пересыхали и, после короткой бурной весны, буйный травяной покров превращался в сухую грубую желто-бурую щетину до сезона осенних дождей. Морской воздух был напоен терпким смолистым ароматом пиний, рощи которых давали густую тень утомленному путнику даже в самый жаркий день. Тут и там виднелись остатки сведенных человеком жестколистных лесов из пробкового дуба. Ничто, кроме монотонного стрекота цикад и несмолкаемого шума прибоя, не нарушало покоя диких скал сухим жарким летом. Ранним утром далеко в море у самого горизонта в прозрачном воздухе смутно угадывались прозрачные силуэты древней Корсики. И никакого человеческого жилья вокруг, кроме лепившихся далеко внизу вдоль подножия крутых скал на узком побережье жалких лачуг бедняков, которые еле-еле сводили концы с концами рыбной ловлей, выходя круглый год в море на своих утлых лодчонках.

К огромному удивлению храбрых монегасков, «Общество морских купаний» сразу же начало строить на вершине скалы самый роскошный в Европе центр шоу-бизнеса того времени – Казино по проекту гениального французского архитектора Шарля Гарнье. Было бы ошибочно думать, что Казино – это только игорный дом. Само название «Казино» происходит от итальянского слова Casa – дом или помещение для общественного развлечения. Кроме игорных салонов, Казино славится Залом Гарнье – концертным залом с уникальными акустическими свойствами, выступление на сцене которого является честью для звезд музыкального мира.

Спустя пять лет этот некогда самый бедный район Монако получил имя Монте-Карло (по-русски Карлова гора) в честь находчивого князя. Маленький клочок земли на этой скале стал стоить целое состояние. Само имя Монте-Карло стало нарицательным благодаря знаменитому Le Casino de Monte-Carlo. «Общество морских купаний» и железная дорога Париж-Монако превратили некогда дикое скалистое побережье в фешенебельный аристократический курорт, который как магнит притягивал богачей и прожигателей жизни всех стран и народов. Place du Casino стала самой знаменитой городской площадью в Монако, на которой и днем и ночью кишат толпы состоятельных туристов, которые принесли огромное богатство и мировую славу этой крошечной конституционной монархии, которая расположена вблизи французско-итальянской границы.

С тех пор Казино является основным инструментом привлечения денежных поступлений в княжеский бюджет. Само посещение знаменитого игорного салона Казино – Salon Preve в наши дни будет стоить вам 100 франков только за право входа и участия в игре. А если учесть, что минимальная ставка для игрока в этом салоне составляет 5000 долларов, то читателю должно стать ясно, где находится основной источник благосостояния современного Монако.

Что наша жизнь? Игра!

Теперь представьте себе, что два российских спекулянта инкогнито прибыли в Монако, посетили Казино и приняли участие в последовательности азартных игр. Назовем наших героев просто – Иванов и Петров. Не будем пока сообщать любопытному читателю, в какую именно азартную игру решили поиграть наши герои. Просто предположим, что сотрудник Казино периодически каждую секунду (минуту, час, сутки) подбрасывает монету, сдает карту, кидает шарик на колесо рулетки, бросает кость или включает компьютерный датчик случайных чисел. Исход игры не зависит от желания как Петрова с Ивановым, так и от желания сотрудника Казино. Исход игры невозможно предсказать в начале игры, имея информацию о предшествующих исходах игр. Достоверно известно лишь то, что в любой азартной игре для игрока возможны только два исхода – успех и неудача. Обозначим успешный исход символом U (от англ. up – вверх), а неудачный исход символом – D (от англ. down – вниз). Тогда конкретную цепочку исходов первых 20 игр для Иванова можно представить случайной последовательностью символов:

U	U	D	D	D	U	D	U	D	D	U	U	U	U	D	U	D	D	D	D

Для Петрова случайная последовательность исходов первых 20 игр может быть совершенно другая:

D	D	U	D	D	D	D	D	D	D	U	D	D	D	U	D	D	U	U	D

Легко подсчитать, что Иванов более успешный игрок, чем Петров. Иванов выиграл в девяти играх, а Петров только в пяти играх из двадцати.

Значит ли это, что Иванов – более умелый игрок, чем Петров? Или, может быть, Иванов просто более везучий? Как правильно ответить на этот «простой» вопрос? Может ли случайная последовательность выигрышей послужить для моделирования динамики цен биржевых активов? На этот вопрос ответил положительно 100 лет назад французский математик Луи Башелье. Идея Башелье была скорректирована спустя 50 лет Полом Самуэльсоном, который ввел понятие геометрического случайного блуждания. Метод моделирования очень прост: когда выигрывает игрок, цена в следующий момент времени увеличивается в u раз, а если случается проигрыш и игрок проигрывает, то цена биржевого актива падает в d раз. Результат моделирования представлен в табл. 1 и графически показан на рис. 1. В приведенном примере исходная цена актива была равна 100 произвольных условных единиц, а коэффициенты роста u и падения d приняты равными 1.25 и 0.8 соответственно.

Динамика биржевых цен, соответствующая последовательности выигрышей Петрова, соответствует медвежьему тренду биржевого рынка, а последовательность выигрышей Иванова дает колебания биржевых цен между линией поддержки и линией сопротивления, которые установились на уровне 70 и 160 условных единиц.

Математический метод моделирования ценообразования с помощью случайной последовательности выигрышей получил название метода Монте-Карло. В настоящее время для получения последовательности выигрышей используются компьютерные датчики случайных чисел.

Вы легко можете реализовать метод Монте-Карло с помощью программы Microsoft Excel, и получить сами результаты, подобные приведенным в табл. 1. Для этого введите

Таблица 1.

Период времени	Иванов			Петров		
	Результат игры	Рост падение	Цена актива	Результат игры	Рост падение	Цена актива
1			100			100
2	U	1.25	125	D	0.8	80
3	U	1.25	156.25	D	0.8	64
4	D	0.8	125	U	1.25	80
5	D	0.8	100	D	0.8	64
6	D	0.8	80	D	0.8	51.2
7	U	1.25	100	D	0.8	40.96
8	D	0.8	80	D	0.8	32.768
9	U	1.25	100	D	0.8	26.2144
10	D	0.8	80	D	0.8	20.97152
11	D	0.8	64	D	0.8	16.77722
12	U	1.25	80	U	1.25	20.97152
13	U	1.25	100	D	0.8	16.77722
14	U	1.25	125	D	0.8	13.42177
15	U	1.25	156.25	D	0.8	10.73742
16	D	0.8	125	U	1.25	13.42177
17	U	1.25	156.25	D	0.8	10.73742
18	D	0.8	125	D	0.8	8.589935
19	D	0.8	100	U	1.25	10.73742
20	D	0.8	80	U	1.25	13.42177
21	D	0.8	64	D	0.8	10.73742

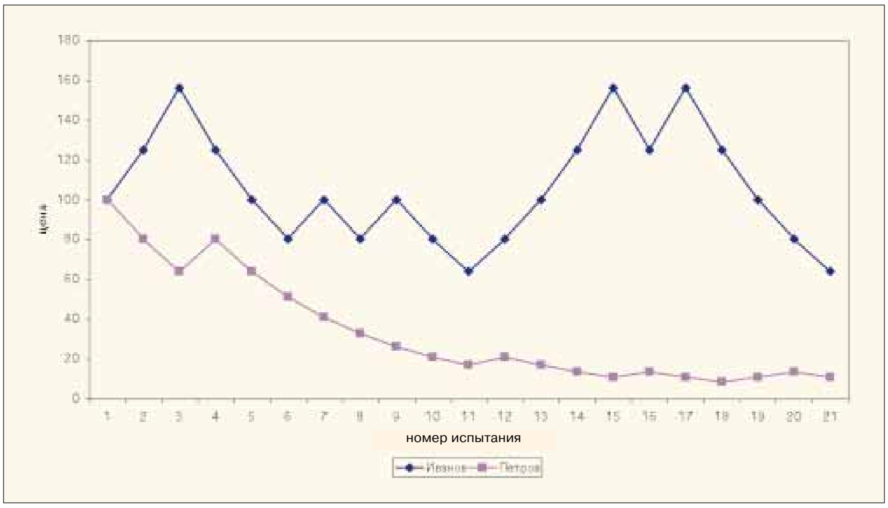


Рис. 1. Моделирование цены биржевого актива.

последовательность целых чисел от 1 до 21 в ячейки **A1-A21**. В ячейку B1 введите формулу **=СЛЧИС( )** (генератор случайных чисел в программе Excel) и протяните до ячейки **B21**. В ячейку **C1** введите формулу **=ЕСЛИ(B1>0.5;1.25;0.8)** и протяните ее до ячейки **C21**. В ячейку **D1** введите число **100**. В ячейку **D2** введите формулу **=D1*C2** и протяните до ячейки **D21**. Выделите мышью интервал **D1: D21** и выберите с помощью мастера диаграмм тип диаграммы – график. Далее действуйте по подсказкам Мастера. После получения графического представления смоделированных результатов цены биржевых активов нажмите клавишу F9. Всякий раз при нажатии клавиши F9 вид кривой на графике будет меняться – компьютер будет генерировать новую случайную последовательность выигрышей, и динамика цен будет совершенно другая. Теперь задание на дом. Измените формулу **=ЕСЛИ(B1>0.5;1.25;0.8)** в интервале **C1:C21** сначала на формулу **=ЕСЛИ(B1>0.6;1.25;0.8)**, а затем на формулу **=ЕСЛИ(B1>0.4;1.25;0.8)**. Что произошло и почему такое могло случиться?

Логарифмический пан или пропал

Рассмотрим случай последовательных бинарных испытаний. Это означает, что игрок может выиграть или проиграть, а третьего ему не дано. Число успехов в последовательности из N случайных испытаний является само случайной величиной. Поэтому у нас возникает закономерный вопрос – как вычислить вероятность появления m успехов в последовательности из N испытаний, когда вероятность успеха в каждом испытании постоянна и равна p? В теории вероятностей эта задача была впервые поставлена великим швейцарским математиком Якобом Бернулли 350 лет назад и изящно решена лишь в 1837 году знаменитым французским математиком Симоном Дени Пуассоном в его классическом труде «Исследование о вероятности судебных приговоров по уголовным и гражданским делам»

Пуассон предположил, что все испытания идентичны и каждое испытание имеет только два исхода. Для каждого испытания вероятность успеха и неудачи постоянны и не зависят от номера испытания. Все испытания являются статистически независимыми, что означает невозможность предсказания будущих исходов по результатам прошлых испытаний. Если случайные исходы испытания обладают подобными свойствами, то в англоязычной литературе говорят об IID или Independent Identically Distributed (независимых одинаково распределенных) случайных переменных.

Пуассон показал, что вероятность появления m успехов в последовательности из N IID бинарных испытаний равна:

$$P\,(m, N, p) = C_N^m\, p^m (1-p)^{N-m} \qquad (1)$$

где p – вероятность успеха в каждом испытании,

$$C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!} \qquad (2)$$

– число сочетаний по m из N элементов,

$$m! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots^{(m-1)} \cdot m \qquad (3)$$

– факториал m.

Полученные формулы полезны практически и позволяют определить вероятности изменения биржевых цен. Для этого необходимо построить биномиальное дерево цен, которое показано на рис. 2, в случае начальной цены актива, равной 100 условных единиц для случая коэффициентов роста u и падения d, равных 1.25 и 0.8 соответственно. Характерной особенностью биномиального дерева является неравномерное распределение цен. Расстояние между соседними ценами пропорционально самим ценам. При высоких ценах возможное приращение цен значительно выше, чем при низком уровне биржевых цен.

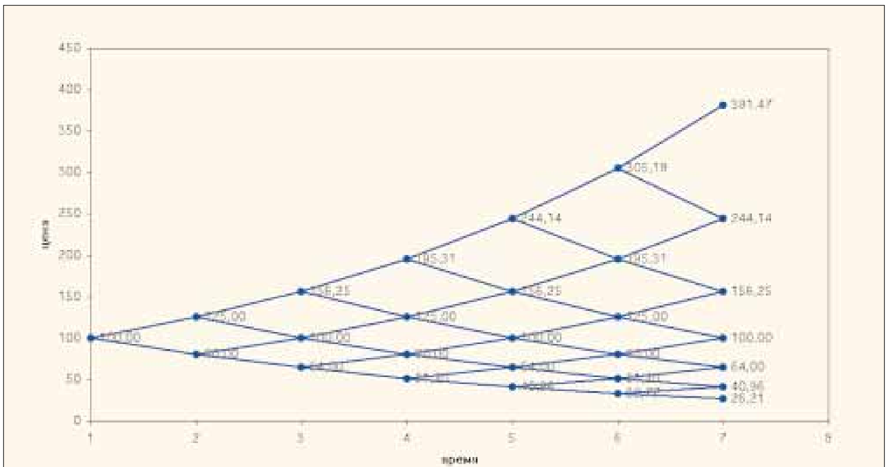


Рис. 2. Биномиальное дерево цен в линейном масштабе.

Посчитаем вероятность, что в момент времени 4 цена актива будет равна 195.31. Этой цене соответствует только одна случайная последовательность выигрышей:

U	U	U

Каждый исход является независимым и если вероятность выигрыша в одной игре равна 1/2, то вероятность трех последовательных выигрышей равна (1/2)* (1/2)* (1/2)= 1/8.

Вычислим вероятность, что в момент времени 4 цена актива будет равна 125. Этой цене соответствует уже три случайных последовательности выигрышей:

U	U	D
U	D	U
D	U	U

Если все последовательности выигрышей равновероятны, то полная вероятность равна сумме вероятностей появления отдельных последовательностей, т.е. вероятность цены в 125 единиц будет равна (1/2)* (1/2)* (1/2)+ (1/2)* (1/2)* (1/2)+(1/2)* (1/2)* (1/2)= 3/8.

Число путей из начала биномиального дерева определяется с помощью треугольника Паскаля, где каждый элемент внутри треугольника равен сумме двух соседних верхних элементов (табл. 2).

Сколько путей существует из начала дерева к цене 156.25 в момент времени 7? С помощью треугольника Паскаля легко находим ответ – 15 путей. Видно, что с увеличением периодов времени число путей резко возрастает.

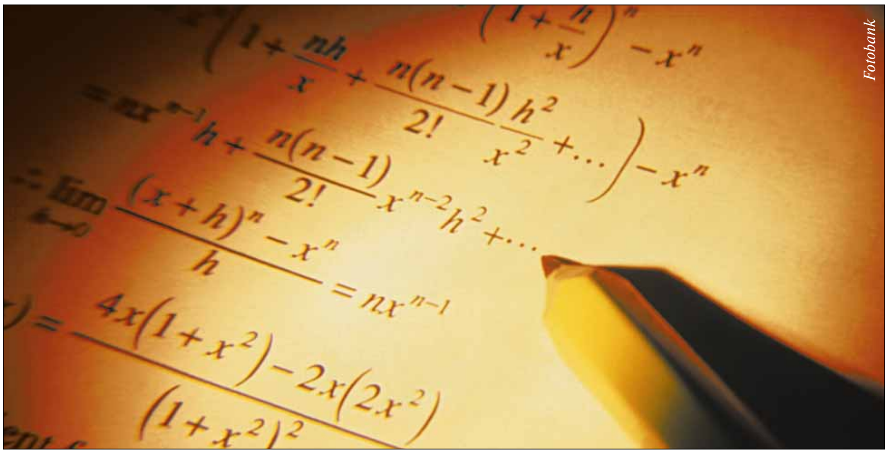
Модель биномиального дерева можно сравнить с детским бильярдом. Шар под действием тяжести скатывается вниз по доске. На поверхности доски расположены штыри, которые отклоняют движущийся шар. Каждое столкновение шара со штырем приводит к отклонению шара вправо или влево. Цена актива меняется во времени подобным образом, в каждый момент времени цена либо возрастает, либо уменьшается. Основное отличие состоит в том, что штыри на детском бильярде расположены равномерно, а цены на биномиальном дереве – логарифмически, что хорошо видно на рис. 3. Именно логарифмический характер распределения цен биржевых активов и был открыт Самуэльсоном, за что ему была заслуженно присуждена в 1970 году Нобелевская премия по экономике.

Подведем итоги. Существует два альтернативных подхода вычисления вероятностных характеристик биржевых активов, которые дополняют друг друга. Метод Монте-Карло выполняется путем многократного повторения прямого имитирования временной последовательности цен на современном компьютере. Метод Монте-Карло позволяет определить вероятность попадания цены актива в заданный интервал цен в определенный момент времени в будущем. Этот метод получил широкое распространение среди институциональных инвесторов – банков и ПИФов. Индивидуальные инвесторы чаще используют биномиальную модель биржевых активов, которая позволяет провести простые вычисления по формулам (1)-(3). Биномиальная модель при увеличении числа временных шагов плавно переходит в логарифмически-нормальную модель ценообразования или в модель случайных (броуновских) блужданий, которая лежит в основе знаменитой формулы Блека-Шоулса.

Александр Ильинский
ilyinsky@fa.ru

Таблица 2.

Момент времени	Треугольник Паскаля																
1									1								
2								1		1							
3							1		2		1						
4						1		3		3		1					
5					1		4		6		4		1				
6				1		5		10		10		5		1			
7			1		6		15		20		15		6		1		
8		1		7		21		35		35		21		7		1	
9	1		8		28		56		70		56		28		8		1



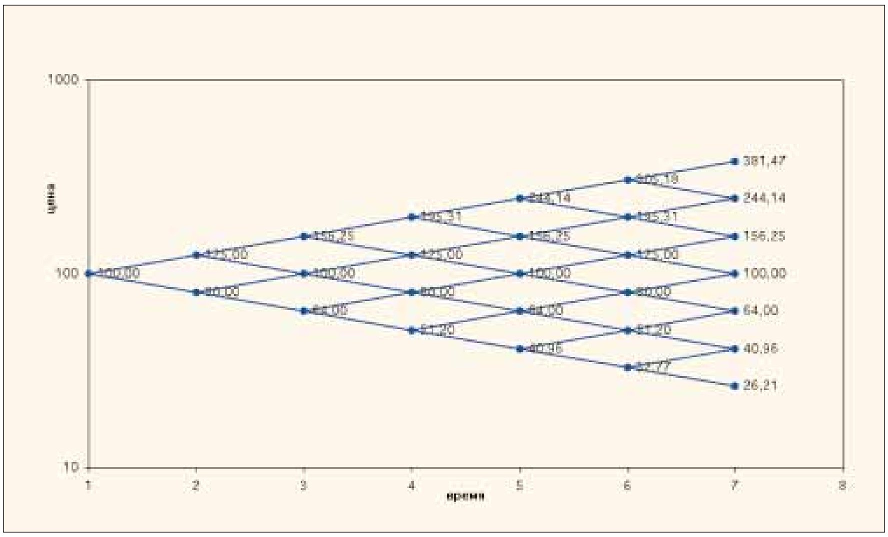


Рис. 3. Биномиальное дерево в логарифмическом масштабе.