Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

А. И. ФЕТИСОВ

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ В ГЕОМЕТРИИ

*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1954

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 14

А. И. ФЕТИСОВ

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ В ГЕОМЕТРИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1954

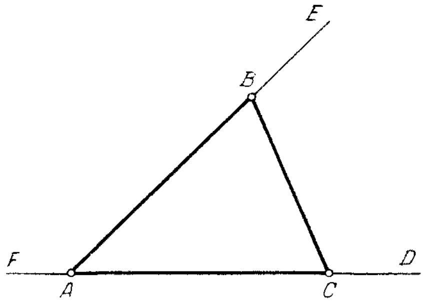
ВВЕДЕНИЕ

Однажды, в самом начале учебного года, мне пришлось услышать разговор двух девочек. Старшая из них перешла в шестой класс, младшая — в пятый. Девочки делились своими впечатлениями об уроках, учителях, подругах, о новых предметах. Шестиклассницу очень удивили уроки геометрии: «Вот чудеса, — говорила она, — пришла учительница в класс, нарисовала на доске два равных треугольника, а потом целый урок доказывала нам, что они — равные. Никак не пойму: зачем это нужно?». — «А как же ты урок будешь отвечать?» — спросила младшая девочка. — «Выучу по учебнику... вот только очень трудно запомнить, где какую букву нужно ставить...».

В тот же день вечером я слышал, как эта девочка, сидя у окна, усердно учила геометрию: «Для доказательства наложим треугольник $A'B'C'$ на треугольник ABC... наложим треугольник $A'B'C'$ на треугольник ABC...» — неоднократно повторяла она. К сожалению, мне не удалось узнать, насколько успешно училась эта девочка по геометрии, но думается, что учиться ей по этому предмету было довольно трудно.

Несколько дней спустя пришел ко мне мой сосед по квартире Толя, тоже шестиклассник, и также с претензиями к геометрии. Им рассказали на уроке и задали на дом выучить теорему о том, что в треугольнике внешний угол больше всякого внутреннего, несмежного с ним. Толя показал мне чертеж из учебника Киселева (черт. 1) и спросил: «Зачем нужно приводить длинное и сложное доказательство, когда на этом чертеже совершенно ясно видно, что внешний угол треугольника — тупой, а несмежные с ним внутренние углы — острые? Но ведь тупой угол всегда больше острого, — убеждал меня Толя, — это же ясно без всякого доказательства». И мне пришлось разъяснить Толе, что предложение это совсем не очевидно и что есть полное основание требовать доказательства предложения о внешнем угле треугольника.

Наконец, совсем недавно один восьмиклассник показал мне свою контрольную работу, за которую ему, по его словам, «несправедливо» снизили оценку. В предложенной задаче была дана равнобедренная трапеция с основаниями в 9 и 25 *см* и с боковой стороной в 17 *см* и предлагалось



Черт. 1.

определить высоту трапеции. Для решения этой задачи в трапецию была вписана окружность, причем было сказано, что на основании теоремы об описанном четырехугольнике (в описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны) в эту трапецию вписать окружность можно ($9+25=17+17$). Далее же высота определялась как диаметр окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, который равен среднему пропорциональному между основаниями трапеции (такое предложение учащимися было доказано в одной из ранее решенных задач).

Решение казалось очень простым и убедительным, однако учитель подчеркнул, что ссылка на теорему об описанном четырехугольнике сделана неправильно. Восьмиклассник недоумевал. «Разве неверно, что у описанного четырехугольника суммы противоположных сторон равны между собой? А ведь у нашей трапеции сумма оснований равна сумме боковых сторон, — ну, значит, и в эту трапецию можно вписать окружность. Где же тут ошибка?» — спрашивал он.

Таких фактов, о которых я только что рассказал, можно привести очень много. Учащиеся часто не понимают, зачем нужно доказывать истины, которые и без доказательства кажутся достаточно ясными, доказательства иногда кажутся излишне сложными и громоздкими. А бывают и такие случаи, когда, казалось бы, ясное и убедительное доказательство при ближайшем рассмотрении оказывается неверным.

Эта маленькая книжка написана для того, чтобы помочь учащимся разобраться в следующих вопросах:

1) Что такое доказательство?
2) Зачем нужно доказательство?
3) Каким должно быть доказательство?
4) Что можно в геометрии принимать без доказательства?

§ 1. ЧТО ТАКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО?

1. Итак, спросим себя, что же такое доказательство? Представьте себе, что вы пытаетесь убедить своего собеседника в том, что Земля имеет форму шара. Вы говорите ему о расширении горизонта по мере подъема наблюдателя над земной поверхностью, о кругосветных путешествиях, о круглой тени, которую отбрасывает Земля на Луну во время лунного затмения, и т. д.

Каждое из этих высказываний, с помощью которых вы желаете убедить вашего собеседника, называется *аргументом* доказательства, а вся совокупность аргументов называется *аргументацией*. На чем основывается сила или убедительность аргумента? Рассмотрим, например, последний из вышеприведенных аргументов. Мы утверждаем, что Земля должна быть круглой, так как тень ее круглая. Это утверждение мы основываем на том, что люди из личного опыта знают, что все тела, имеющие форму шара, отбрасывают от себя круглую тень, и обратно, круглая форма тени при различных положениях тела получается от тел, имеющих шарообразную форму. Итак, в данном случае мы прежде всего опираемся на ф а к т ы, на наш непосредственный жизненный опыт, свидетельствующий о свойствах тел окружающего нас материального мира. Дальше же мы прибегаем к у м о з а к л ю ч е н и ю, которое в данном случае строится примерно в следующем порядке.

«Все тела, отбрасывающие от себя в различных положениях круглую тень, имеют форму шара». «Земля во время лунных затмений, занимая различные положения по отношению к Луне, всегда отбрасывает на нее круглую тень». Вывод: «Следовательно, Земля имеет форму шара».

Приведем пример из физики. В шестидесятых годах прошлого столетия английский физик Максвелл установил, что электромагнитные колебания распространяются в пространстве с такой же скоростью, с какой распространяется свет. Это обстоятельство заставило его сделать предположение (гипотезу), что свет тоже представляет собой электромагнитные колебания. Для того чтобы доказать правильность этого предположения, нужно было установить, что сходство между световыми и электромагнитными волнами не ограничивается только одинаковой скоростью их распространения, нужно было привести достаточно веские аргументы, доказывающие одинаковую природу обоих явлений. Такими аргументами явились результаты опытов, в которых обнаружилось несомненное влияние магнитного и электрического полей на характер лучеиспускания света различными источниками. Был обнаружен и ряд других фактов, которые со всей убедительностью показали, что световые и электромагнитные колебания имеют одну и ту же природу.

Дадим еще арифметический пример. Возьмем какие-нибудь нечетные числа, возведем каждое из них в квадрат и каждый из полученных квадратов уменьшим на единицу. Например:

$$7^2 - 1 = 48; \quad 11^2 - 1 = 120; \quad 5^2 - 1 = 24;$$
$$9^2 - 1 = 80; \quad 15^2 - 1 = 224$$

и т. д. Рассматривая полученные числа, мы замечаем в них одно общее свойство: оказывается, что каждое из них делится без остатка на 8. Произведя еще несколько проб с другими нечетными числами и придя к такому же результату, мы выскажем гипотезу: «Квадрат всякого нечетного числа, уменьшенный на единицу, дает число, кратное 8».

Так как теперь у нас речь идет о *всяком* нечетном числе, то для доказательства нам нужно привести аргументы, которые годились бы для *любого* нечетного числа. Имея это в виду, вспомним, что любое нечетное число имеет вид $2n - 1$, где n — какое угодно натуральное число. Квадрат нечетного числа, уменьшенный на единицу, можно записать в виде выражения $(2n - 1)^2 - 1$. Раскрывая скобки, получим: $(2n - 1)^2 - 1 = 4n^2 - 4n + 1 - 1 = 4n^2 - 4n = 4n(n - 1)$.

Полученное выражение при любом натуральном n кратно 8. Действительно, множитель четыре указывает на то, что число $4n(n - 1)$ кратно 4. Кроме того, $n - 1$ и n — два последовательных натуральных числа, одно из которых обязательно четное; следовательно, наше выражение обязательно содержит еще и множитель 2.

Итак, число $4n(n-1)$ всегда кратно 8, что и требовалось доказать.

На этих примерах мы можем уяснить себе те основные пути, по которым идет познание нами окружающего нас мира, его предметов, явлений и закономерностей. Первый путь заключается в том, что мы на основании большого числа наблюдений и опытов над предметами и явлениями открываем в них общие закономерности. В приведенных нами примерах мы могли видеть, что на основании наблюдений люди установили зависимость между формой тела и его тенью; многочисленные наблюдения и опыты подтвердили электромагнитную природу света; наконец, испытания, которые мы произвели над квадратами нечетных чисел, помогли установить свойство таких квадратов, уменьшенных на единицу. Этот путь — получение общих выводов из рассмотрения многочисленных частных случаев — называется *индукцией* (от латинского слова inductio — «наведение», — частные случаи наводят нас на мысль о существовании общих закономерностей .

Другим путем мы идем, когда, уже зная некоторые общие законы, прилагаем эти знания к частным случаям. Этот путь называется *дедукцией* (от латинского слова deductio — «выведение»). Так, в последнем примере мы применили общие законы арифметики к частному случаю — к доказательству существования некоторого свойства всякого нечетного числа.

Этот пример показывает нам, что индукцию и дедукцию нельзя отрывать друг от друга. Единство индукции и дедукции — характерная черта научного мышления.

Нетрудно заметить, что в процессе всякого доказательства мы пользуемся этими двумя путями. Когда мы ищем аргументы для доказательства того или иного предложения, мы обращаемся к опыту, наблюдениям, фактам или к уже доказанным, достоверным предложениям. На основе полученных данных мы умозаключаем об истинности или ложности доказываемого предложения.

2. Вернемся, однако, к геометрии. В геометрии изучаются пространственные свойства материального мира. «Пространственными» мы называем такие свойства, которыми определяются форма, величина и взаимное положение предметов. Понятно, что необходимость знания таких свойств связана с практическими потребностями людей: людям нужно измерять длины, площади и объемы, для того чтобы конструировать машины, строить здания, проводить дороги, каналы и т. д. Естественно, что первоначальные геометрические знания были получены индуктивным путем из очень большого числа наблюдений и опытов. Однако по мере накопления геометрических истин обнаружилось, что многие из них могут быть получены из других истин при помощи умозаключений, т. е. дедукции, не прибегая к специальному опыту.

Так, например, многократные наблюдения и опыт убеждают нас в том, что «через две точки можно провести одну и только одну прямую линию». А на основании этой истины мы можем уже без всякого опыта утверждать, что «две различные прямые могут иметь не более одной общей точки». Эта новая истина получается путем весьма простого рассуждения. Действительно, если мы допустим, что две различные прямые могут иметь две общие точки, то отсюда мы должны будем сделать вывод, что через две точки могут проходить две различные прямые, что противоречит ранее установленной истине.

Практическая деятельность людей привела к открытию очень большого числа геометрических истин, отражающих наши знания о пространственных формах материального мира. Внимательное изучение этих истин показало, что одни из них можно получить путем логических выводов из других. Это привело к мысли выделить из всех геометрических истин часть наиболее простых и общих, которые можно принять без доказательства, а остальные геометрические свойства и зависимости выводить дедуктивным путем из этих основных истин.

Такая мысль возникла еще у геометров древней Греции, которые стали приводить в систему известные им геометрические истины, выводя их из сравнительно небольшого числа основных предложений. За 300 лет до нашей эры греческий геометр Евклид Александрийский дал наиболее совершенное для своего времени изложение системы геометрии. В этом изложении были выделены предложения, принимаемые без доказательства, — так называемые *аксиомы* (греческое слово ἄξιος означает «достойный», заслуживающий доверия). Остальные предложения, истинность которых обнаруживается при помощи доказательства, стали называть *теоремами* (от греческого слова θεορεο — обдумываю, размышляю).

Система геометрии Евклида просуществовала в течение многих столетий, и даже в наше время в современной школе изложение геометрии во многих разделах отражает на себе влияние Евклида. Таким образом, в системе геометрии мы имеем сравнительно небольшое число основных истин — аксиом, полученных путем индукции и принимаемых без доказательства, остальные же истины геометрии выводятся из аксиом при помощи дедуктивных умозаключений. Поэтому геометрия является в основном дедуктивной наукой.

В настоящее время работа многих геометров направлена к тому, чтобы выявить все аксиомы, необходимые для построения системы геометрии, и по возможности сократить их число. Работа в этом направлении была начата еще в прошлом столетии, и хотя уже очень много сделано, но все же эту работу нельзя считать вполне законченной и в настоящее время.

Итак, подводя итог всему изложению этого раздела, мы можем теперь ответить на вопрос: что же такое доказательство в геометрии? Как мы видели, доказательство представляет собой систему умозаключений, при помощи которых истинность доказываемого предложения выводится из аксиом и ранее доказанных истин.

Остается ответить еще на один вопрос: чем гарантируется истинность предложений, полученных при помощи дедуктивного умозаключения? Истинность дедуктивного вывода обусловлена тем, что в нем мы прилагаем некоторые общие законы к частным случаям, так как совершенно очевидно, что все то, что справедливо вообще и всегда, будет справедливо и для каждого отдельного случая.

Если я, например, говорю, что сумма углов всякого треугольника равна 180°, что фигура ABC — треугольная, то не может быть никакого сомнения в том, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. При внимательном изучении геометрии нетрудно убедиться в том, что именно так мы и рассуждаем при каждом умозаключении.

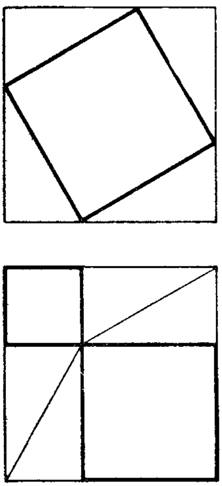
§ 2. ЗАЧЕМ НУЖНО ДОКАЗАТЕЛЬСТВО?

1. Постараемся теперь ответить на второй вопрос: «Зачем нужно доказательство?».

Необходимость доказательства есть следствие одного из основных законов логики (логика — наука о законах правильного мышления) — *закона достаточного основания.* Этот закон заключает в себе требование, чтобы всякое высказываемое нами утверждение было обосновано, т. е. чтобы оно сопровождалось достаточно сильными аргументами, подтверждающими истинность нашего утверждения, согласованность его с фактами, с действительностью. Такими аргументами могут быть как указание на возможность проверки путем наблюдения и опыта, так и правильно построенное рассуждение, содержащее систему умозаключений.

В математике мы имеем дело главным образом с аргументацией последнего вида.

Доказательство геометрического предложения имеет своей целью установление его достоверности при помощи логического вывода из уже доказанных или известных истин.



Черт. 2.

Однако при этом все же возникает вопрос: стоит ли иметь дело с доказательством, когда доказываемое предложение и без того достаточно ясно и очевидно?

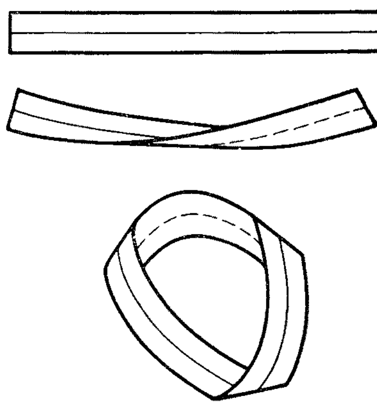
Примерно на такой точке зрения стояли индийские математики в эпоху средневековья. Многие геометрические предложения они не доказывали, а делали к ним достаточно выразительный чертеж и писали над ним одно слово «смотри!». Так, например, в книге «Лилавати» индийского математика Бхаскара Ачарья теорема Пифагора выглядит так (черт. 2). Из этих двух чертежей читатель должен «усмотреть», что сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.

Можно ли сказать, что в данном случае отсутствует доказательство? Конечно, нет! Если бы читатель стал просто смотреть на чертеж, не рассуждая, то едва ли он мог прийти к какому-нибудь выводу. На самом же деле автор предполагает, что читатель не только смотрит, но и думает. Читатель должен понять, что перед ним начерчены равные квадраты, которые имеют и равные площади. Первый квадрат состоит из четырех равных прямоугольных треугольников и квадрата, построенного на гипотенузе, а второй квадрат состоит из четырех таких же прямоугольных треугольников и двух квадратов, построенных на катетах. Остается только сообразить, что если от равных величин (площади двух больших равных квадратов) отнять поровну (площади четырех прямоугольных треугольников), то у нас останутся равные площади: в первом случае — квадрат, построенный на гипотенузе, во втором случае — два квадрата, построенных на катетах. Как видим, здесь совершенно недостаточно опираться только на очевидность, а нужно думать и рассуждать.

Но, может быть, все же существуют такие теоремы в геометрии, которые действительно настолько очевидны, что можно обойтись без всяких рассуждений?

Здесь нужно прежде всего указать на то, что систематически опираться на очевидность в точной науке нельзя, так как понятие «очевидно» — крайне расплывчатое и неустойчивое: то, что одному кажется совершенно очевидным, другому может показаться весьма сомнительным. Стоит только вспомнить, как различно описывают какое-нибудь событие свидетели его и как иногда бывает трудно установить истину по так называемым «показаниям очевидцев».

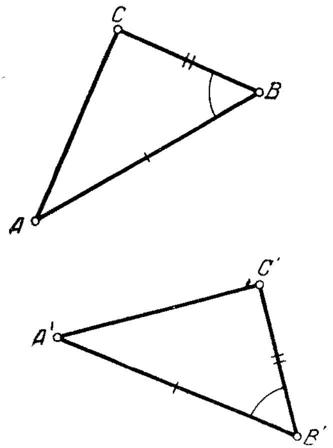
Можно привести интересный геометрический пример того, как нас может обмануть кажущаяся очевидность. Пример этот заключается в следующем: я беру лист бумаги и рисую на нем непрерывную замкнутую линию; потом я беру ножницы и произвожу разрез по этой линии. Спрашивается: что будет с листом бумаги после того, как концы разреза сомкнутся? Наверное большинство из вас, не задумываясь, ответит: лист бумаги распадется на два отдельных куска. Однако этот ответ может оказаться неверным. Проделаем такой опыт: возьмем бумажную ленту и склеим из нее кольцо, перевернув предварительно один из концов ленты. В результате мы получим так называемый «*лист Мёбиуса*» (черт. 3). (Мёбиус — немецкий математик, изучавший поверхности такого вида.) Если теперь разрезать этот лист по замкнутой линии вдоль ленты, проводя разрез приблизительно на равных расстояниях от ее краев, то лист не распадется на две отдельные части — в наших руках останется попрежнему один лист. Факты, подобные только что описанному, заставляют призадуматься



Черт. 3.

над тем, насколько мы можем доверяться соображениям, основанным на «очевидности».

2. Разберемся повнимательнее в этом вопросе. Возьмем в качестве первого примера рассказанный выше случай с шестиклассницей. Девочке показалось странным, что учительница нарисовала два равных треугольника и потом доказывала как будто очевидный факт, что они равны. Дело тут, конечно, обстояло совсем иначе: у ч и т е л ь н и ц а в о в с е н е ч е р т и л а р а в н ы х т р е у г о л ь н и к о в, а начертив треугольник ABC (черт. 4), она сказала, что другой треугольник $A'B'C'$ построен так, что $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ и $\angle B = \angle B'$, и что мы не знаем, будут ли равны $\angle A'$ и $\angle A$, $\angle C'$ и $\angle C$ и стороны $A'C'$ и AC (ведь углов A' и C' она не строила по углам A и C и сторону $A'C'$ она не делала равной стороне AC).

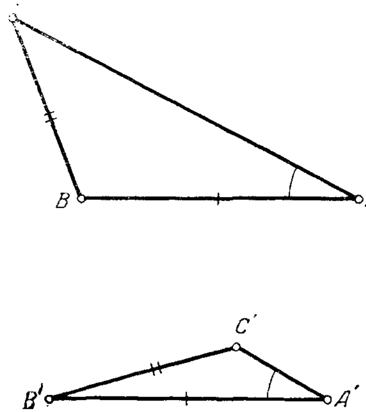


Черт. 4.

Таким образом, в этом случае мы должны из условий $A'B' = AB$; $B'C' = BC$ и $\angle B' = \angle B$ в ы в е с т и равенство треугольников, т. е. равенство всех остальных их элементов, что, конечно, требует некоторых рассуждений, т. е. доказательства. Легко также показать, что равенство треугольников, получаемое на основании равенства трех пар их соответствующих элементов, далеко не так «очевидно», как это может показаться с первого взгляда. Изменим несколько условие первой теоремы о равенстве треугольников: пусть две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого, а также равны и углы, но не заключенные между этими сторонами, а лежащие против одной из равных сторон, например BC и $B'C'$. Запишем это условие в $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ и $\angle A' = \angle A$. Что мы можем сказать про такие треугольники? По аналогии с первым случаем равенства треугольников мы могли бы ожидать, что и теперь треугольники будут равны, но черт. 5 с полной очевидностью убеждает нас, что начерченные здесь треугольники ABC и $A'B'C'$ хотя и удовлетворяют условиям

$A'B' = AB$, $B'C' = BC$ и $\angle A' = \angle A$, но совсем не являются равными.

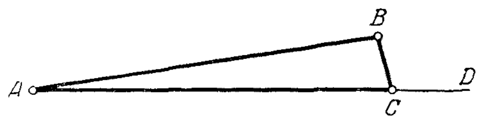
Примеры подобного рода заставляют нас быть очень осторожными в наших суждениях и достаточно ясно показывают, что только правильно построенное доказательство может нам гарантировать истинность устанавливаемых предложений.



Черт. 5.

3. Рассмотрим теперь вторую теорему — о внешнем угле треугольника, вызвавшую недоумение у моего соседа Толи. Действительно, на том чертеже, который дан в стабильном учебнике, внешний угол тупой, а несмежные с ним внутренние углы острые, что легко оценить без всякого измерения, на глаз. Но следует ли отсюда, что теорема не нуждается в доказательстве? Безусловно, нет. Ведь в теореме речь идет не только о том треугольнике, что начерчен в книге, или на бумаге, или на доске, а о всяком треугольнике, вид которого может быть очень непохожим на треугольник, данный в учебнике.

Представим, например, себе, что точка A удаляется по прямой от точки C. Мы тогда получим треугольник ABC



Черт. 6.

такого вида (черт. 6), что угол при точке B будет тоже тупой. Если же точка A удалится от точки C примерно метров на 10, то в таком длинном треугольнике наш школьный транспортир уже не сможет обнаружить разницы между внутренним углом B и внешним. Ну, а если точка A удалится от точки C на расстояние, равное расстоянию от Земли до Солнца, то можно с полной уверенностью сказать, что никакой из самых точных современных угломерных инструментов не сумеет обнаружить разницы между этими углами. Отсюда становится ясным, что и для этой теоремы говорить об «очевидности» не приходится. Строгое же доказательство, даваемое этой теореме, не зависит от случайного вида треугольника, данного на чертеже, и показывает, что теорема о внешнем угле справедлива для каких угодно треугольников и никак не связана с относительной длиной их сторон. Поэтому даже в тех случаях, когда разница между внутренним и внешним углом настолько мала, что ускользает от наших измерительных инструментов, мы все же сохраняем уверенность в том, что эта разница есть. Ведь мы доказали, что всегда, во всех случаях, внешний угол треугольника больше каждого внутреннего, несмежного с ним.

В связи с этим примером нужно обратить внимание на роль чертежа при доказательстве геометрической теоремы. Нужно хорошо помнить, что чертеж есть только вспомогательное средство при доказательстве теоремы, что он есть только пример, только частный случай целого класса геометрических фигур, по отношению к которому доказывается данная теорема. Поэтому очень важно уметь отделить на данном чертеже общие и постоянные свойства фигуры от частных и случайных. Например, на чертеже к теореме о внешнем угле треугольника, приведенном в стабильном учебнике, оказывается случайным тот факт, что внешний угол является тупым, а внутренние — острыми. Очевидно, что опираться на такие случайные факты при доказательстве свойства, общего для всех треугольников, нельзя.

Существенной особенностью геометрического доказательства, в значительной степени определяющей его необходимость, является то, что при помощи доказательства устанавливаются общие свойства пространственных фигур. Если доказательство проведено правильно и опиралось на правильные исходные положения, то это дает нам безусловную уверенность в истинности доказываемого положения. Именно поэтому мы убеждены, что любая геометрическая теорема, например теорема Пифагора, справедлива для треугольников любых размеров с длиной сторон и в несколько миллиметров и в миллионы километров.

4. Наконец, есть еще одна, чрезвычайно важная причина, обусловливающая необходимость доказательства. Дело в том, что геометрия представляет собой не случайный набор истин, описывающих пространственные свойства тел, а **научную систему**, построенную по строгим законам. В этой системе каждая теорема органически связана с совокупностью ранее установленных предложений и эта связь раскрывается при помощи доказательства. Например, известная теорема о том, что сумма внутренних углов треугольника равна 180°, доказывается на основании свойств параллельных прямых, что указывает на непосредственную связь между теорией параллельных прямых и свойствами сумм внутренних углов многоугольников. Точно так же на свойства параллельных прямых опирается вся теория подобия фигур.

Таким образом, каждая геометрическая теорема связана целой системой умозаключений с ранее доказанными теоремами, ранее доказанные — с теоремами, доказанными еще ранее, и т. д., и цепи этих умозаключений тянутся до тех пор, пока не дойдут до основных определений и аксиом, составляющих фундамент всего здания геометрии. Эту систему связей легко проследить, взяв любую геометрическую теорему и рассмотрев все те предложения, на которые она опирается.

Итак, подводя итог всему изложенному о необходимости доказательства, мы можем сказать следующее:

а) В геометрии только небольшое число основных истин — аксиом — принимается без доказательства. Остальные же истины — теоремы — доказываются на основании этих аксиом путем построения ряда умозаключений. Справедливость самих аксиом гарантируется тем, что как они сами, так и доказываемые с их помощью теоремы проверены многократными наблюдениями и длительным опытом.

б) Доказательство проводится в силу требования одного из основных законов нашего мышления — закона достаточного основания, указывающего на необходимость строгого обоснования истинности наших утверждений.

в) В правильно построенном доказательстве можно опираться только на ранее доказанные предложения и никакие ссылки на очевидность недопустимы[1]).

г) Доказательство необходимо также для обоснования общности доказываемого предложения, т. е. применимости его ко всем частным случаям.

---

[1]) Многие положения науки, считавшиеся неопровержимыми в силу их очевидности, оказались со временем ложными. В любой науке каждое положение должно быть строго доказано.

д) Наконец, при помощи доказательств геометрические истины приводятся в стройную *систему* научных знаний, в которой раскрываются все внутренние связи между различными свойствами пространственных форм.

§ 3. КАКИМ ДОЛЖНО БЫТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО?

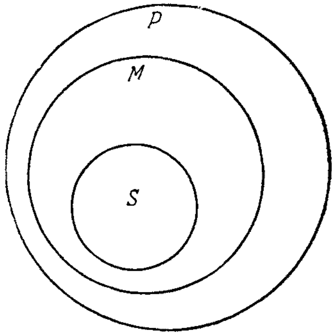
1. Перейдем теперь к следующему вопросу: каким же условиям должно удовлетворять доказательство, чтобы мы могли назвать его *правильным*, т. е. гарантирующим истинность вывода из истинных предпосылок? Обратим прежде всего внимание на то, что каждое доказательство состоит из ряда умозаключений, поэтому правильность или неправильность доказательства зависит от правильности или неправильности входящих в него умозаключений.

Как мы уже видели выше, дедуктивное умозаключение представляет собой применение некоторого общего закона к данному частному случаю. Для того чтобы не допустить ошибки в умозаключении, необходимо знать некоторые схемы, при помощи которых изображаются соотношения между всякими, в том числе и геометрическими понятиями. Покажем это на примере. Положим, что мы построили такое умозаключение: 1) У всех прямоугольников диагонали равны между собой. 2) Все квадраты — прямоугольники. 3) Вывод: у всех квадратов диагонали равны между собой.

Что же мы имеем в данном случае? Первое предложение устанавливает некоторый общий закон, в котором утверждается, что все прямоугольники, т. е. *целый класс* геометрических фигур, называемых прямоугольниками, принадлежат к классу четырехугольников, имеющих равные диагонали. Второе предложение утверждает, что весь класс квадратов есть часть класса прямоугольников. Отсюда мы имеем полное основание сделать вывод, что и весь класс квадратов есть часть класса четырехугольников, имеющих равные диагонали. Выразим это умозаключение в общей форме. Обозначим наиболее обширный класс (четырехугольники, имеющие равные диагонали) буквой P, средний класс (прямоугольники) — буквой M, меньший класс (квадраты) — буквой S. Тогда наше умозаключение в схематическом виде будет выглядеть так:

1) Все M суть P.
2) Все S суть M.
3) Вывод: все S суть P.

Это соотношение легко изобразить графически. Наибольший класс P изобразим большим кругом (черт. 7). Класс M изобразим меньшим кругом, целиком помещающимся внутри первого круга. Наконец, класс S изобразим еще меньшим кругом, помещающимся внутри второго круга. Несомненно, что при таком положении кругов круг S целиком лежит внутри круга P.

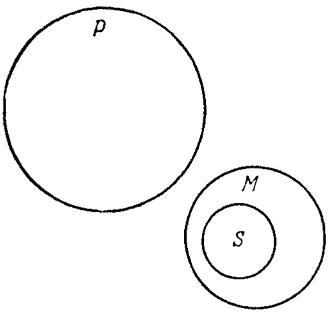


Черт. 7.

Заметим, что это отображение соотношений между понятиями было предложено великим математиком Леонардом Эйлером — членом Петербургской Академии наук (1707—1783).

При помощи подобной схемы можно отобразить и иные формы умозаключений. Рассмотрим еще умозаключение, содержащее отрицательный вывод:

1) Все четырехугольники, у которых сумма противоположных углов не равна 180°, не могут быть вписаны в окружность.



Черт. 8.

2) У косоугольного параллелограмма сумма противоположных углов не равна 180°.

3) Вывод: косоугольный параллелограмм нельзя вписать в окружность. Обозначим класс четырехугольников, которые нельзя вписать в окружность, буквой P, класс четырехугольников, сумма противоположных углов которых не равна 180°, буквой M, класс косоугольных параллелограммов буквой S. Тогда мы убедимся, что умозаключение наше построено по такой схеме:

1) Ни одно M не есть P.

2) Все S суть M.

3) Вывод: ни одно S не есть P.

Это соотношение также весьма наглядно изображается при помощи эйлеровых кругов (черт. 8).

Подавляющее большинство дедуктивных умозаключений в геометрии строится либо по первой, либо по второй схеме.

2. Подобное изображение соотношений между геометрическими понятиями дает возможность хорошо понять структуру всякого умозаключения и обнаружить ошибку в неправильных умозаключениях.

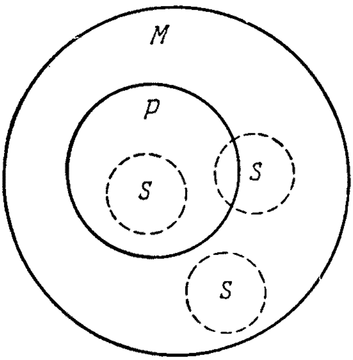
В качестве примера разберем вышеописанное рассуждение восьмиклассника, которое учитель признал неверным. Восьмиклассник строил такое умозаключение:

1) У всех описанных четырехугольников суммы противоположных сторон равны между собой.

2) У данной трапеции суммы противоположных сторон равны между собой.

3) Вывод: данная трапеция может быть описана около окружности.

Обозначив класс описанных четырехугольников через P, класс четырехугольников, у которых равны суммы противоположных сторон, через M, и класс трапеций, у которых сумма оснований равна сумме боковых сторон, через S, мы приведем рассуждение к такой схеме:



Черт. 9.

1) Все P суть M.

2) Все S суть M.

3) Вывод: все S суть P — неверен, так как, изображая соотношения между классами при помощи кругов Эйлера (черт. 9), мы видим, что P и S находятся внутри M, но мы не можем сделать никакого вывода о зависимости между S и P.

Чтобы яснее убедиться в неправильности полученного вывода, приведем в качестве примера совершенно аналогичное умозаключение:

1) Все смежные углы дают в сумме 180°.

2) Два данных угла дают в сумме 180°.

3) Вывод: следовательно, данные углы смежные. Вывод, конечно, неверный, так как данные углы могут давать в сумме 180°, вовсе не будучи смежными (например, противоположные углы вписанного четырехугольника). Почему же получаются подобные ошибки? Объясняется это тем, что тот, кто

применяет подобное рассуждение, ссылается на прямую теорему, вместо того чтобы сослаться на обратную. В примере с описанным четырехугольником в основу положена теорема о том, что в описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны между собой. Обратная же теорема о том, что во всякий четырехугольник, у которого суммы противоположных сторон равны между собой, можно вписать окружность, в стабильном учебнике не доказана, хотя доказать ее можно, и мы дальше приведем это доказательство.

Если бы эта теорема была доказана, то правильное умозаключение нужно было построить в такой форме:

1) Во всякий четырехугольник, у которого суммы противоположных сторон равны между собой, можно вписать окружность.

2) У данной трапеции сумма оснований равна сумме боковых сторон.

3) Вывод: следовательно, в данную трапецию можно вписать окружность. Вывод, конечно, совершенно правильный, так как построен по схеме, которая иллюстрируется черт. 6.

1) Все M суть P.

2) Все S суть M.

3) Вывод: все S суть P.

Итак, ошибка восьмиклассника заключалась в том, что он опирался в своем доказательстве на прямую теорему, тогда как ему нужно было опираться на обратную.

3. Докажем эту важную обратную теорему.

Теорема. *Во всякий четырехугольник, у которого суммы противоположных сторон равны между собой, можно вписать окружность.*

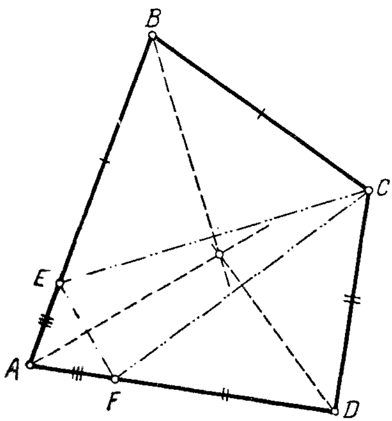
Заметим прежде всего, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то центр этой окружности находится на одном и том же расстоянии от всех его сторон. А так как биссектриса угла есть геометрическое место точек, равноудаленных от его сторон, то центр вписанной окружности лежит на биссектрисе каждого внутреннего угла. Итак, центр вписанной окружности есть точка пересечения четырех биссектрис внутренних углов четырехугольника.

Далее, если хотя бы только три биссектрисы четырехугольника пересекаются в одной и той же точке, то через эту точку пройдет и четвертая биссектриса и эта точка находится на равных расстояниях от всех четырех сторон и является центром вписанной окружности. Доказать это можно при помощи тех же рассуждений, которые приводятся при доказательстве теоремы о существовании окружности, вписанной в треугольник, и потому мы предоставляем читателю провести это доказательство самостоятельно.

Переходим теперь к основной части доказательства. Итак, пусть мы имеем четырехугольник $ABCD$ (черт. 10), для которого имеет место соотношение

$$AB + CD = BC + AD. \qquad (1)$$

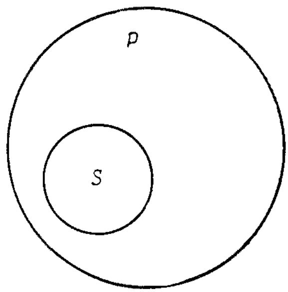
Прежде всего мы исключаем случай, когда данный четырехугольник окажется ромбом, так как у ромба диагонали суть биссектрисы внутренних углов и потому точка их пересечения есть центр вписанной окружности, т. е. в ромб всегда можно вписать окружность. Положим поэтому, что в нашем четырехугольнике существуют две неравные смежные стороны. Пусть, например, $AB > BC$. Тогда в силу равенства (1) мы будем иметь: $CD < AD$. Отложим на AB отрезок $BE = BC$ и получим равнобедренный $\triangle BCE$. Отложим на AD отрезок $DF = CD$ и получим равнобедренный $\triangle CDF$. Докажем. что $\triangle AEF$ тоже равнобедренный. Действительно, перенесем в равенстве (1) BC в левую часть, а CD — в правую и получим: $AB - BC = AD - CD$, но $AB - BC = AE$, $AD - CD = AF$. Итак, $AE = AF$ и $\triangle AEF$ равнобедренный. В трех полученных равнобедренных треугольниках проведем биссектрисы углов при вершине, т. е. биссектрисы $\angle B$, $\angle D$ и $\angle A$. Эти три биссектрисы перпендикулярны к основаниям CE, CF и EF и делят их пополам. Следовательно, они являются перпендикулярами, восставленными в серединах сторон треугольника CEF и поэтому должны пересечься в одной и той же точке. Следовательно, три биссектрисы нашего четырехугольника пересекаются в одной и той же точке, которая, как это было показано выше, является центром вписанной окружности.



Черт. 10.

4. Довольно часто встречается следующая ошибка в доказательстве: вместо того чтобы сослаться на обратную теорему, ссылаются на прямую. Нужно быть очень внимательным, чтобы не допустить эту ошибку. Например, если учащимся предлагают определить вид треугольника, стороны которого имеют 3, 4 и 5 единиц длины, то обычно можно слышать, что этот треугольник прямоугольный, так как сумма квадратов двух его сторон, $3^2 + 4^2$, равна квадрату третьей стороны, 5^2, причем ссылаются на теорему Пифагора, хотя нужно сослаться на теорему, ей обратную. Эта обратная теорема утверждает, что если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то такой треугольник прямоугольный. Хотя в стабильном учебнике эта теорема и доказывается, но часто ей не уделяется достаточного внимания, что и служит причиной вышеуказанной ошибки.

В связи с этим полезно установить условия, при которых одновременно истинны прямая и обратная теоремы. Мы уже знаем примеры, когда прямая и обратная теоремы одновременно истинны, но можно привести не меньше примеров, когда прямая теорема истинна, а обратная нет. Например, прямая теорема правильно утверждает, что вертикальные углы равны между собой, тогда как обратная теорема должна утверждать, что все равные между собой углы суть углы вертикальные, что, конечно, неверно.

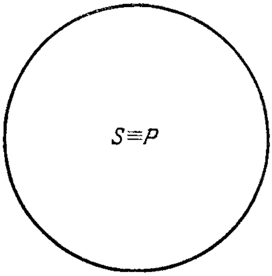


Черт. 11.

Чтобы наглядно уяснить себе соотношение между прямой и обратной теоремой, мы вновь прибегнем к схематическому изображению этого соотношения. Если в прямой теореме содержится утверждение: «Все S суть P» («Все пары вертикальных по отношению друг к другу углов суть пары равных между собою углов»), то обратная теорема должна содержать утверждение: «Все P суть S» («Все пары равных между собой углов суть пары вертикальных по отношению друг к другу углов»). Изображая соотношения между понятиями в прямой теореме при помощи кругов Эйлера (черт. 11), мы убедимся, что из того, что класс S составляет часть класса P, мы можем, вообще говоря, утверждать лишь, что «Некоторые P суть S». «Некоторые пары равных между собой углов суть пары вертикальных по отношению друг к другу углов».

При каких же условиях будут одновременно истинными и предложение «Все S суть P» и предложение «Все P

суть S»? Совершенно очевидно, что это может случиться тогда и только тогда, когда классы S и P **тождественны** ($S \equiv P$). В этом случае круг, изображающий S, совпадет с кругом, изображающим P (черт. 12). Например, для теоремы «Все равнобедренные треугольники имеют равные углы, прилегающие к основанию» справедливо и обратное утверждение: «Все треугольники, имеющие равные углы при основании, суть равнобедренные треугольники». Это объясняется тем, что класс равнобедренных треугольников и класс треугольников, имеющих равные углы при основании,—один и тот же. Точно так же совпадают класс прямоугольных треугольников и класс треугольников, у которых квадрат одной из сторон равен сумме квадратов двух других сторон. Нашему восьмикласснику «повезло», он все же решил задачу, несмотря на то, что опирался на прямую теорему вместо обратной.



Черт. 12.

Но это оказалось возможным только потому, что класс четырехугольников, в которые можно вписать окружность, совпадает с классом четырехугольников, у которых суммы противоположных сторон равны между собой. (В данном случае оказалось верным и что «все P суть M», и что «все M суть P», — см. схему вывода на стр. 18.)

Это исследование в то же время показывает, что обратная теорема, если она правильна, вовсе не есть очевидное следствие прямой, а *всегда требует специального доказательства.*

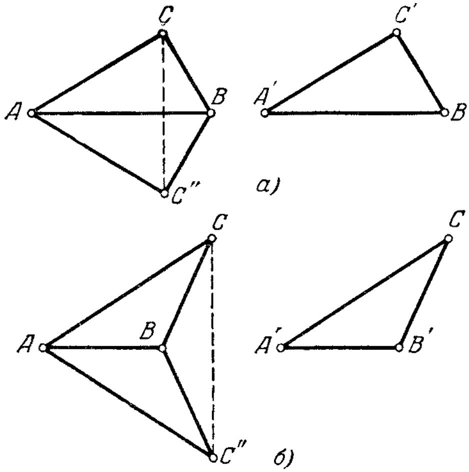
5. Иногда может показаться, что прямая и обратная теоремы не подходят под схему «Все S суть P» и «Все P суть S». Так бывает в тех случаях, когда эти теоремы выражаются в форме так называемого «условного суждения», которое схематически может быть записано в виде: «Если A есть B, то C есть D». Например: «Если четырехугольник описан около окружности, то суммы противоположных сторон его равны между собой». Первая часть предложения— «Если A есть B» — называется *условием* теоремы, вторая часть — «то C есть D» — называется ее *заключением.* Обратная теорема получается из прямой таким образом, что заключение делается условием, а условие — заключением.

Во многих случаях выражение теоремы в форме условного суждения является более привычным, чем в форме «Все S суть P», которая называется «категорической». Однако нетрудно убедиться в том, что это различие несущественно и всякое условное суждение легко преобразуется в категорическое, а категорическое — в условное. Например, теорему, выраженную в условной форме: «Если две параллельные прямые пересечь третьей, то внутренние накрестлежащие углы равны между собой», можно в категорической форме выразить так: «Параллельные прямые при пересечении их третьей прямой образуют равные внутренние накрестлежащие углы». Таким образом, наши рассуждения остаются в силе и для теорем, выраженных в условной форме. И здесь одновременная истинность прямой и обратной теорем обусловлена тем, что совпадают классы соответствующих понятий. Так, в только что рассмотренном примере одновременно справедливы и прямая и обратная теоремы, так как класс «параллельных прямых» тождествен с классом «прямых, которые при пересечении их третьей образуют равные внутренние накрестлежащие углы».

6. Перейдем теперь к рассмотрению других неправильностей в доказательстве. Довольно часто ошибка в доказательстве имеет своей причиной то, что при доказательстве опираются на частные случаи, не замечая иных свойств данной фигуры. Такая именно ошибка была в рассуждении моего соседа Толи, который хотел общую теорему о внешнем угле всякого треугольника доказать, ограничиваясь рассмотрением только остроугольного треугольника, у которого действительно все внешние углы тупые, а все внутренние — острые.

Приведем еще пример подобной ошибки в доказательстве, которая на этот раз гораздо менее заметна. Выше мы приводили пример двух неравных треугольников (см. черт. 4), у которых все же соответственно равны две стороны и угол, лежащий против одной из них. Дадим теперь пример «доказательства», которое, вопреки установленному факту, утверждает, что треугольники, удовлетворяющие вышеуказанным условиям, будут непременно равными. Доказательство это интересно еще и тем, что оно очень похоже на доказательство третьего признака равенства треугольников в стабильном учебнике.

Итак, пусть в $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ (черт. 13) дано, что $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\angle C = \angle C'$. Для доказательства приложим $\triangle A'B'C'$ к $\triangle ABC$ так, чтобы сторона $A'B'$ совпала со стороной AB и точка C' заняла бы положение C''. Соединим точки C и C'' и допустим, что отрезок CC'' пересечет сторону AB между точками A и B (черт. 13, *а*). По условию, $\triangle ACC''$ равнобедренный ($AC = AC''$) и, значит, $\angle ACC'' = \angle AC''C$, а так как $\angle C = \angle C''$, то, отнимая от равных углов равные, получим, что и $\angle BCC'' = \angle BC''C$ и,



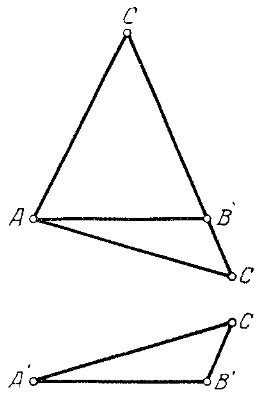
Черт. 13.

значит, $\triangle CBC''$ тоже равнобедренный. Поэтому $BC = BC''$ и, значит, $\triangle ABC = \triangle ABC''$ по трем сторонам. Итак, $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Если же отрезок CC'' пересечет прямую AB вне отрезка AB, то теорема попрежнему остается справедливой (черт. 13, *б*). Действительно, $\triangle ACC''$ и в этом случае равнобедренный и $\angle ACC'' = \angle AC''C$. Но так как $\angle C = \angle C''$, то, отнимая эти углы от обоих углов предыдущего равенства, получим опять, что $\angle BCC'' = \angle BC''C$ и $\triangle BCC''$ равнобедренный, $BC = BC''$, и мы вновь пришли к третьему признаку равенства треугольников, т. е. опять $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

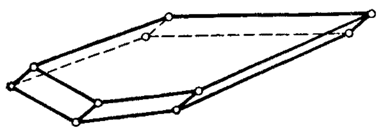
Кажется, мы привели достаточно полное доказательство и исчерпали все возможные случаи. Однако оказался упущенным еще один возможный случай, именно, когда отрезок CC'' пройдет через конец отрезка AB. На черт. 14 отрезок CC'' проходит через точку B. Легко видеть, что в этом случае наши рассуждения становятся неприменимы и треугольники могут оказаться совсем различными, как это и показано на черт. 14.

Другим, весьма поучительным примером ошибки подобного же рода являются теоремы о боковой поверхности наклонной призмы и равносоставленности прямой и наклонной призм, имеющиеся в стабильном учебнике А. П. Киселева и в курсе элементарной геометрии Н. А. Глаголева. Первая из этих теорем утверждает: «Боковая поверхность призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро» (А. П. Киселев, Геометрия, ч. II, стр. 38). Во второй теореме говорится: «Каждая призма равносоставлена с прямой призмой, основанием которой служит перпендикулярное сечение наклонной призмы, а высотой — ее боковое ребро» (Н. А. Глаголев, Геометрия, ч. II, стр. 89).



Черт. 14.

Однако нетрудно убедиться в том, что и та и другая теоремы доказаны лишь для частного случая, именно, когда ребра призм настолько длинны, что в призме можно провести перпендикулярное сечение. В то же время существует целый класс таких призм, в которых перпендикулярное сечение, пересекающее все боковые ребра, провести нельзя. Это — сильно наклонные призмы с очень малой высотой (черт. 15). В такой призме сечение, перпендикулярное к одному из боковых ребер, не пересечет остальных ребер, и все рассуждения, приводимые при доказательстве этих предложений, оказываются неприменимыми. В данном случае ошибка произошла от укоренившейся в нас привычки представлять себе призму в виде бруска с довольно большой высотой, тогда как невысокие «табличные» призмы почти никогда не изображаются ни на доске, ни в тетради, ни в учебнике. Этот пример показывает также, с какой осторожностью мы должны относиться


Черт. 15.

к чертежу, которым мы пользуемся для иллюстрации доказательства. Каждый раз, производя какое-нибудь построение, необходимое по ходу доказательства, мы всегда должны спрашивать себя: «А во всех ли случаях это построение можно произвести?». Вот если бы такой вопрос был задан при доказательстве вышеуказанных предложений о наклонной призме, то нетрудно было бы найти пример такой призмы, в которой перпендикулярное сечение провести нельзя.

7. В двух последних примерах сущность ошибки сводится к тому, что *доказывается не то предложение, которое нужно доказать, а лишь некоторый частный случай*, связанный с особенностями той фигуры, на которой проводилось доказательство. Можно привести еще пример подобной ошибки, только более глубокой и не так бросающейся в глаза.

Речь идет о доказательстве существования несоизмеримых отрезков, которое обычно излагается в курсе элементарной геометрии в школе. Напомним вкратце общий ход рассуждений при этом доказательстве. Сначала дается определение общей меры двух отрезков и устанавливается, что эта общая мера откладывается целое число раз на сумме и разности данных отрезков. Затем дается метод отыскания общей меры, известный еще Евклиду. Этот способ заключается в том, что меньший отрезок откладывается на большем, первый остаток откладывается на меньшем отрезке, второй остаток — на первом остатке и т. д. Остаток, который отложится целое число раз на предшествующем остатке, и есть общая наибольшая мера данных отрезков. Далее определяется, что отрезки, имеющие общую меру, называются *соизмеримыми*, а не имеющие общей меры — *несоизмеримыми*. Однако самый факт существования несоизмеримых отрезков должен быть доказан теоретически путем обнаружения хотя бы одной пары таких отрезков. В качестве примера обычно приводят факт несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной. Доказательство ведется посредством применения евклидова метода последовательных отложений стороны квадрата на его диагонали, остатка на его стороне и т. д. При этом обнаруживается, что разность между диагональю и стороной является стороной нового квадрата, которую вновь нужно отложить на новой диагонали, и т. д. и, значит, такой процесс последовательных отложений никогда не будет закончен и общую наибольшую меру диагонали квадрата и его стороны найти нельзя. А дальше делается вывод: следовательно, общей меры стороны квадрата и его диагонали найти нельзя и, значит, отрезки несоизмеримы.

В чем же ошибочность этого вывода? Ошибка здесь заключается в том, что из невозможности найти общую меру методом Евклида еще никак не следует, что этой общей меры не существует. Ведь если мы какой-нибудь предмет не можем найти при помощи какого-нибудь способа поисков, то это не значит, что предмет отсутствует, так как, может быть, его можно найти другими способами. Мы же никак, например, не могли бы согласиться с таким рассуждением: «Электроны ни в какой микроскоп увидеть нельзя, следовательно, электронов не существует». Понятно, что на такое рассуждение очень легко возразить так: «Существуют, помимо микроскопа, другие средства и методы, при помощи которых мы можем убедиться в существовании электронов».

Чтобы доказательство о существовании несоизмеримых отрезков сделать полноценным, необходимо предварительно доказать следующее предложение.

Если процесс отыскания общей наибольшей меры двух отрезков может неограниченно продолжаться, то такие отрезки несоизмеримы.

Приведем доказательство этого важного предложения. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — данные отрезки (черточками сверху мы будем обозначать отрезки, а буквами без черточек — числа), причем $\bar{a} > \bar{b}$. Пусть при последовательном отложении $\bar{b}$ на $\bar{a}$, первого остатка $\bar{r}_1$ на $\bar{b}$ и т. д. мы получим неограниченный ряд остатков: $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$, ..., причем каждый предыдущий остаток больше последующего. Итак, мы будем иметь:

$$\bar{a} > \bar{b} > \bar{r}_1 > \bar{r}_2 > \bar{r}_3 > \ldots$$

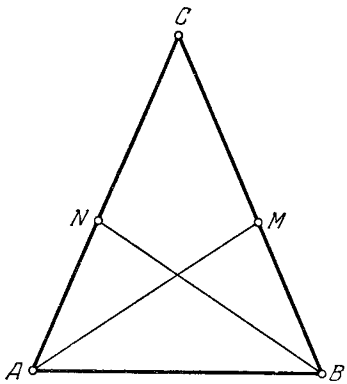
Допустим, что отрезки $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общую меру p, которая, по свойству общей меры, должна отложиться целое число раз на $\bar{a}$, на $\bar{b}$ и на каждом из остатков $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \ldots$ Пусть эта мера отложилась на $\bar{a}$ m раз, на $\bar{b}$ — n раз, на $\bar{r}_1$ — n_1 раз, на $\bar{r}_2$ — n_2 раз, ..., на $\bar{r}_k$ — n_k раз и т. д. Числа m, n, n_1, n_2, n_3, ... — целые положительные, причем в силу неравенств между отрезками мы будем иметь соответствующие неравенства и между числами

$$m > n > n_1 > n_2 > n_3 > \ldots$$

Так как мы допустили, что ряд отрезков продолжается бесконечно, то и ряд чисел m, n, n_1, n_2, n_3, ... тоже должен продолжаться бесконечно, что невозможно, так как ряд последовательно убывающих целых положительных чисел не может быть бесконечным. Полученное противоречие заставляет нас отказаться от допущения существования общей меры у таких отрезков, т. е. признать их несоизмеримыми. На примере квадрата мы убеждаемся в существовании таких отрезков, для которых процесс последовательного отложения не может никогда закончиться, значит, диагональ квадрата несоизмерима с его стороной.

Без этого дополнительного предложения доказательство существования несоизмеримых отрезков не достигает своей цели, так как доказанным оказывается совсем не то предложение, которое нам нужно доказать.

8. Довольно часто в доказательствах имеет место и другой вид ошибок, который заключается в том, что при доказательстве опираются на предложение, еще не доказанное. Хотя и не часто, но бывает даже и так, что доказывающий ссылается как раз на то предложение, которое он доказывает. Так, например, иногда можно слышать такой разговор между учителем и учеником. Учитель спрашивает: «Почему же эти прямые перпендикулярны?». Ученик отвечает: «А потому, что угол между ними прямой». — «А почему угол прямой?» — «Потому, что прямые перпендикулярны».



Черт. 16.

Подобная ошибка называется «кругом в доказательстве» и встречается в столь явной форме довольно редко. Чаще ее можно встретить в замаскированном виде. Например, ученику дана задача: «Доказать, что если равны две биссектрисы треугольника, то треугольник равнобедренный».

Доказательство было проведено так: «Пусть в $\triangle ABC$ биссектриса AM равна биссектрисе BN (черт. 16). Рассмотрим $\triangle ABM$ и $\triangle ABN$, которые равны, так как $AM = BN$, AB — общая и $\angle ABN = \angle BAM$ как половины равных углов при основании. Итак, $\triangle ABM = \triangle ABN$ и, значит,

$AN = BM$. Далее, рассмотрим $\triangle ACM$ и $\triangle BCN$, которые равны, так как $AM = BN$, и соответственно равны углы, прилегающие к этим сторонам. Поэтому $CN = CM$, значит, $AN + NC = BM + CM$, т. е. $AC = BC$, что и требовалось доказать».

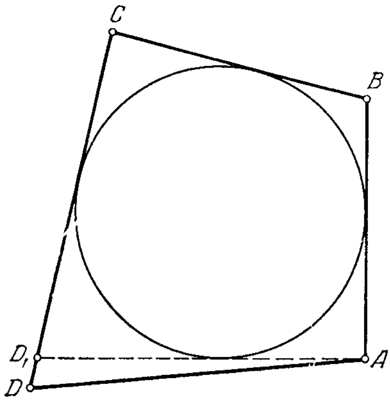
Ошибка этого доказательства заключается в том, что имеется ссылка на равенство углов при основании треугольника. Но ведь равенство этих углов есть следствие того, что треугольник равнобедренный, а это и есть то предложение, которое нужно доказать.

Бывают и такие случаи, когда при доказательстве опираются на недоказанные предложения, рассматривая их как очевидные, хотя эти предложения и не включены в число аксиом. Рассмотрим два примера. При изучении вопроса о взаимном положении прямой и окружности рассматривают три случая: 1) расстояние прямой от центра окружности больше радиуса — прямая проходит вне окружности; 2) расстояние прямой от центра равно радиусу — прямая имеет с окружностью одну и только одну общую точку (касательная); 3) расстояние прямой от центра меньше радиуса — прямая имеет с окружностью две общие точки (секущая).

Обратим внимание на то, что два первых предложения сопровождаются правильными доказательствами, а в третьем случае говорят: «Прямая проходит через точку, лежащую внутри круга, и тогда, очевидно, прямая пересекает окружность». Однако нетрудно видеть, что в этом рассуждении под словом «очевидно» скрывается весьма важное геометрическое предложение: «Всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку круга, пересекает окружность». Правда, это предложение достаточно очевидно, но мы уже указывали, насколько смутным и неопределенным является понятие очевидности. Поэтому предложение это необходимо включить либо в число аксиом, либо доказать его, опираясь на другие предложения.

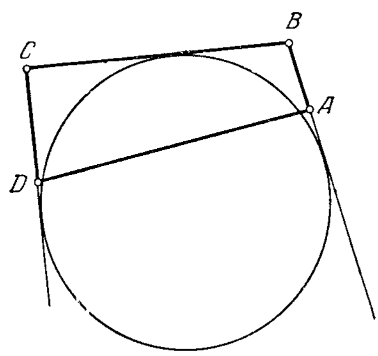
В качестве второго примера мы приведем доказательство обратной теоремы об описанном четырехугольнике, которое приводится в некоторых курсах элементарной геометрии. Итак, нам нужно доказать, что *если в четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.*

Приводим дословно доказательство: «Дано $AB + CD = BC + AD$ (черт. 17). Проведем окружность, касающуюся сторон AB, BC и CD. Докажем, что она коснется и стороны AD. Допустим, что она не коснулась стороны AD. Проведя из точки A касательную AD_1, получим описанный четырехугольник $ABCD_1$, в нем в силу прямой теоремы $AB + CD_1 = BC + AD_1$. Вычитая это равенство почленно из данного, получим: $CD - CD_1 = AD_1 - AD$, или $DD_1 = AD_1 - AD$, что невозможно (разность двух сторон $\triangle ADD_1$ не может равняться третьей стороне). Следовательно, окружность, касающаяся сторон AB, BC и CD, касается и стороны AD».



Черт. 17.

Ошибка этого доказательства заключается в том, что оно опирается на еще не доказанное знание о положении точки A: нужно сначала доказать, что *точка касания окружности лежит между точками A и B*. Если точки A и D будут иметь такое положение, какое показано на черт. 18, то для них нельзя будет провести те рассуждения, какие приводятся в доказательстве. Доказать, что точки касания должны лежать между A и B и между C и D, можно, но это приводит к довольно длинным рассуждениям, поэтому лучше пользоваться тем доказательством, которое мы показали раньше (см. стр. 19).



Черт. 18.

Таким образом, на наш вопрос о том, каким условиям должно удовлетворять доказательство, чтобы оно было правильным, т. е. гарантирующим истинность доказываемого предложения, мы должны ответить так:

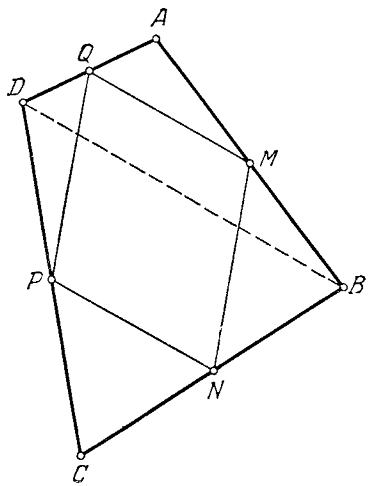
а) Доказательство должно опираться только на истинные предложения, т. е. на аксиомы и ранее доказанные теоремы.

б) Все умозаключения, из которых состоит доказательство, должны быть правильно построены.

в) Нужно всегда иметь в виду цель доказательства, т. е. установление истинности доказываемого предложения, и не подменять это предложение каким-нибудь другим[1]).

9. В связи с необходимостью соблюдать эти требования естественно возникает вопрос: а как же отыскать правильные доказательства?

Дадим несколько советов для разрешения этого вопроса. Прежде всего, когда мы получаем для доказательства какое-нибудь геометрическое предложение, следует совершенно четко выделить ту *основную мысль*, которая должна явиться предметом доказательства. Довольно часто эта мысль бывает недостаточно ясно выражена. Например, мы имеем такое предложение: «Доказать, что, соединив последовательно середины сторон четырехугольника, мы получим параллелограмм». Чем мы можем доказать, что у нас получится параллелограмм? Для ответа на этот вопрос мы вспомним *определение* параллелограмма как четырехугольника, у которого противоположные стороны попарно параллельны. Значит, нам нужно доказать параллельность полученных отрезков.



Черт. 19.

После того как выделено предложение, подлежащее доказательству, нужно из текста данной теоремы выделить те условия, которые даны в этом тексте и которые необходимы для доказательства. В приведенном примере сказано, что мы соединяем *середины* сторон четырехугольника, — это значит, что на сторонах четырехугольника берутся точки, делящие каждую сторону на равные части.

Все это мы оформим в виде символической записи, обычно применяемой в школьной практике и включаемой под рубриками «Дано» и «Требуется доказать». Так, в нашем примере, если мы имеем четырехугольник $ABCD$ (черт. 19),

[1]) Как это получилось в примере на стр. 26.

M, N, P, Q — середины его сторон, то нашу теорему мы можем записать так:

Дано: в четырехугольнике $ABCD$ $MA=MB$, $NB=NC$, $PC=PD$, $QD=QA$.

Доказать: $MN \parallel PQ$, $MQ \parallel NP$.

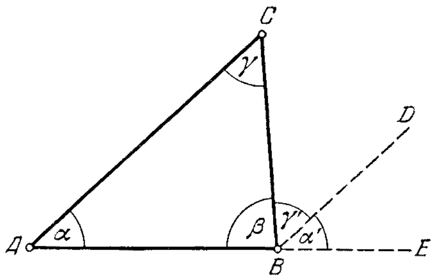
После такой записи идет доказательство теоремы. При доказательстве мы должны использовать ранее установленные аксиомы и теоремы и вместе с тем (и это нужно особенно хорошо помнить) те специальные соотношения, которые указаны в условиях теоремы.

10. Но как найти ту последовательность умозаключений, которая должна связать доказываемое предложение с ранее установленными истинами и с условием теоремы? Как выбрать из большого числа разнообразных предложений именно те, которые помогут нам доказать нашу теорему?

Разумнее всего в наших поисках отправляться от того предложения, которое требуется доказать, и ставить вопрос так: следствием какого предложения может получиться доказываемое предложение? Если такое предложение будет найдено и если оно является следствием условия и ранее доказанных теорем, то наша задача разрешена. Если же этого нет, то мы вновь ставим тот же вопрос уже для этого нового предложения и т. д. Такой путь мысли носит в науке название *анализа*.

В рассматриваемом нами примере с четырехугольником нам нужно доказать параллельность некоторых отрезков. Вместе с тем мы вспомним, что эти отрезки соединяют середины сторон четырехугольника. Установив это, мы спрашиваем себя: нет ли среди ранее доказанных предложений такого, в котором говорилось бы о параллельности отрезков, соединяющих середины сторон многоугольника? Одним из таких предложений является теорема о средней линии треугольника, в которой говорится, что отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, параллелен третьей стороне и равен ее половине. Но в рассматриваемой фигуре таких треугольников нет. Однако такой треугольник в ней нетрудно построить. Проведем, например, диагональ BD. Тогда мы получим сразу два треугольника — ABD и BCD, в которых отрезки MQ и NP служат средними линиями. Итак, $MQ \parallel BD$ и $NP \parallel BD$; следовательно, $NP \parallel MQ$. Проведя вторую диагональ, мы подобным же путем доказали бы, что и $MN \parallel PQ$. Впрочем, во втором построении нет необходимости, так как из первой пары треугольников мы имеем, что $MQ = \frac{1}{2} BD$ и $NP = \frac{1}{2} BD$; следовательно, $MQ = NP$, т. е. противоположные стороны MQ и NP четырехугольника $MNPQ$ не только параллельны, но и равны, а отсюда прямо следует, что этот четырехугольник — параллелограмм.

В качестве второго примера возьмем известную теорему о сумме внутренних углов треугольника. В этом случае в текст теоремы не включено никаких специальных условий и поэтому следует записать только то, что нужно доказать: в $\triangle ABC$ (черт. 20) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



Черт. 20.

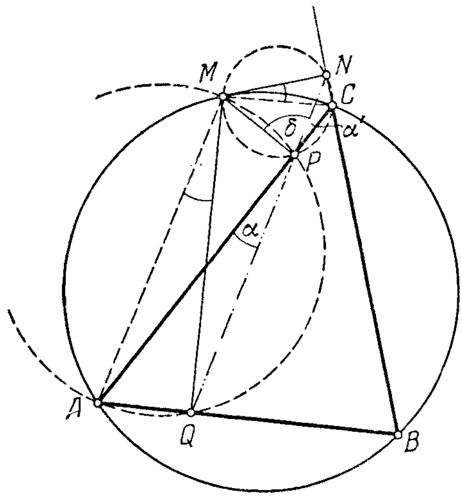
Из содержания доказываемого предложения мы видим, что нам необходимо произвести сложение трех внутренних углов треугольника. Это сложение целесообразнее всего произвести на самой фигуре. Построим при вершине B угла β угол $\gamma' = \gamma$. Тогда сторона BD угла γ' будет параллельна AC в силу равенства внутренних накрестлежащих углов при секущей BC. Продолжая сторону AB за точку B, получим $\angle CBE$, который обозначим α'. $\alpha' = \alpha$ как соответственные углы при тех же параллельных и секущей AB. Итак, мы имеем: $\alpha' + \beta + \gamma' = 180°$, так как эти углы вместе составляют развернутый угол. Отсюда в силу равенства углов $\alpha' = \alpha$, $\gamma' = \gamma$ получим нужное соотношение

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

В обоих приведенных примерах мы довольно скоро приходим к отысканию нужных связей. Но бывают и такие случаи, когда эта связь устанавливается посредством целого ряда вспомогательных предложений. Тогда анализ становится более длинным и сложным.

11. Приведем пример более сложного анализа. Требуется доказать следующее предложение (А. П. Киселев, Геометрия, ч. I, стр. 80, задача 13): *Если около треугольника описать окружность и из произвольной точки ее опустить перпендикуляры на стороны треугольника, то их основания лежат на одной прямой (прямая Симсона).*

Проведем анализ. Пусть ABC — данный треугольник (черт. 21), M — точка описанной окружности, N, P, Q—проекции этой точки соответственно на стороны BC, CA, AB данного треугольника. Нужно доказать, что N, P и Q лежат на одной и той же прямой. Записать доказываемое предложение



Черт. 21.

можно, приняв во внимание, что условие принадлежности точек N, P, Q одной и той же прямой равносильно тому, что угол NPQ — развернутый. Итак, мы имеем:

Дано: $MN \perp BC$, $MP \perp CA$, $MQ \perp AB$; точка M принадлежит окружности, описанной около $\triangle ABC$.

Доказать: $\angle NPQ = 180°$. Рассматривая угол NPQ, видим, что он состоит из $\angle MPN = \delta$, $\angle MPA = 90°$ и $\angle APQ = \alpha$. Предложение было бы доказано, если бы нам удалось доказать, что $\angle NPQ = \delta + 90° + \alpha = 180°$. Но для этого нам достаточно доказать, что $\alpha + \delta = 90°$. Рассмотрим $\angle CPN = \alpha'$. Так как $\angle MPC = 90°$, то, значит, $\alpha' + \delta = 90°$. Вот если бы нам удалось доказать, что $\alpha' = \alpha$, тогда теорема была бы доказана. Искомое равенство попробуем установить, рассматривая новые углы, для чего используем условия теоремы. Прямые углы APM и AQM опираются на отрезок AM, поэтому окружность, построенная на AM как на диаметре, пройдет через точки P и Q. В силу свойств вписанных углов

$\angle AMQ = \angle APQ = \alpha$. Подобным же образом, строя на MC как на диаметре окружность, увидим, что она пройдет через P и N и по свойству вписанных углов $\angle CMN = \angle CPN = \alpha'$. Попробуем теперь доказать, что $\angle AMQ = \angle CMN$. Для этого заметим, что четырехугольник $ABCM$ — вписанный, поэтому в нем сумма противоположных углов равна 180°:

$$\left.\begin{aligned} \angle AMC + \angle B = 180^\circ, \\ \text{или} \quad \angle AMQ + \angle QMC + \angle B = 180^\circ. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

С другой стороны, в четырехугольнике $BQMN$ углы при точках Q и N прямые, поэтому сумма двух других его углов равна 180°:

$$\left.\begin{aligned} \angle QMN + \angle B = 180^\circ, \\ \text{или} \quad \angle QMC + \angle CMN + \angle B = 180^\circ. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), получим:

$$\angle QMC + \angle CMN + \angle B = \angle AMQ + \angle QMC + \angle B,$$

откуда

$$\angle CMN = \angle AMQ,$$

т. е. $\alpha' = \alpha$.

Отсюда, как мы уже видели, следует, что $\alpha + \delta = 90^\circ$, $\alpha + \delta + 90^\circ = 180^\circ$ и, наконец, $\angle NPQ = 180^\circ$.

Если бы нам нужно было последовательно изложить ход доказательства, то пришлось бы итти обратным путем: вначале мы доказали бы, что $\angle AMQ = \angle CMN$, далее установили бы равенства

$$\angle AMQ = \angle MQN \text{ и } \angle CMN = \angle CPN.$$

Наконец, из того, что $\angle CPA = \angle CPN + \angle MPN + 90^\circ = 180^\circ$, мы получили бы, что и $\angle NPQ = \angle MPN + 90^\circ + \angle APQ = 180^\circ$, т. е. что точки N, P и Q лежат на одной и той же прямой.

Этот обратный анализу путь изложения доказательства, которым обычно пользуются в учебниках и в классе при доказательстве теорем, называется с и н т е з о м. Излагать доказательство теоремы синтетическим способом проще и естественнее, но не нужно забывать того, что при о т ы с к а н и и доказательства мы должны неизбежно пользоваться анализом.

Итак, анализ и синтез — две неразрывно связанные между собой стадии одного и того же процесса — построения доказательства данной теоремы. Анализ — метод отыскания доказательства, синтез—метод изложения доказательства.

Конечно, при отыскании доказательства какого-нибудь предложения не всегда легко найти нужную последовательность умозаключений. Не всегда удается сразу стать на правильный путь — иногда приходится отказываться от намеченного способа и переходить к другому.

Приведем пример. Пусть нам нужно доказать предложение: «Если две медианы треугольника равны между собой, то этот треугольник — равнобедренный». Дан $\triangle ABC$, в котором медианы AM и BN равны между собой. Сначала может показаться целесообразным рассмотреть треугольники ABM и ABN и доказать их равенство. Однако нетрудно видеть, что для такого доказательства у нас нет достаточных данных: мы знаем только, что $AM = BN$ и что сторона AB у этих треугольников общая. Ни равенства углов, ни равенства третьих сторон нам не дано. Поэтому от такого пути придется отказаться. Точно так же мы убедимся и в том, что нет смысла рассматривать треугольники ACM и BCN, так как для доказательства равенства и этих треугольников у нас мало данных. Отказавшись от рассмотрения этих треугольников, поищем нового пути. Обозначим через P точку пересечения медиан и рассмотрим треугольники ANP и BMP. В силу равенства медиан и благодаря тому, что точка P лежит на одной трети каждой медианы, получим, что $PN = PM$, $PA = PB$ и $\angle APN = \angle BPM$ как вертикальные. Следовательно, $\triangle ANP = \triangle BMP$ и, значит, $AN = BM$. А так как эти отрезки являются половинами соответствующих сторон, то и $AC = BC$, что и требовалось доказать.

Умение делать анализ и самостоятельно находить доказательства приобретается путем многократных упражнений, для чего необходимо систематически решать задачи на доказательство.

12. В заключение этого раздела обратим внимание на то, что доказывать какую-нибудь теорему мы можем двумя способами — прямым и косвенным.

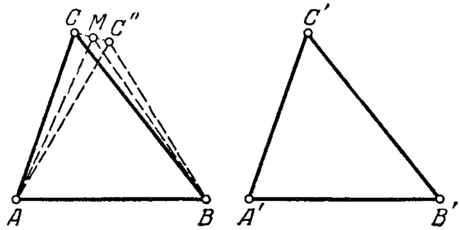
При прямом доказательстве мы убеждаемся в истинности доказываемого предложения, устанавливая непосредственную связь между этим предложением и ранее доказанными.

При непрямом (косвенном) доказательстве мы устанавливаем, что, усомнившись в истинности доказываемого предложения и приняв его за ложное, мы придем к противоречию или с условиями, или с ранее доказанными предложениями. Поэтому косвенное доказательство называется также доказательством **от противного** или доказательством при помощи **приведения к нелепости**.

В предыдущем изложении мы пользовались по преимуществу прямым доказательством. Приведем теперь примеры доказательства от противного.

В качестве первого примера мы приведем доказательство третьего признака равенства треугольников. В стабильном учебнике сказано, что доказывать этот признак наложением неудобно, так как мы ничего не знаем о равенстве углов. Однако, пользуясь методом от противного, и этот признак можно доказать наложением.

Итак, пусть ABC и $A'B'C'$ — данные треугольники (черт. 22), в которых $BC = B C'$, $CA = C'A'$, $AB = A'B'$. Для доказа-



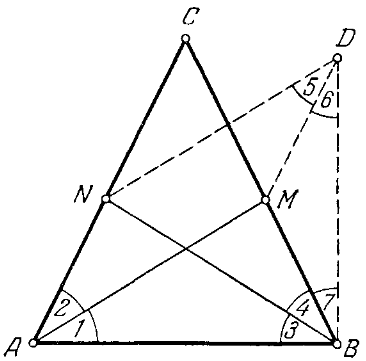
Черт. 22.

тельства наложим $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ так, чтобы сторона $A'B$ совпала с AB. Так как мы ничего не знаем о равенстве углов, то мы не можем утверждать, что точка C' попадет в точку C. Допустим поэтому, что она займет положение C''. Соединим точки C и C''. $\triangle ACC''$ равнобедренный (по условию $AC'' = AC$), $\triangle BCC''$ — тоже ($BC'' = BC$ по условию). Высота AM равнобедренного треугольника ACC'' пройдет через точку M — середину стороны CC'' (так как в равнобедренном треугольнике высота совпадает с медианой). Высота BM равнобедренного треугольника BCC'' также пройдет через середину M стороны CC''. Итак, мы получили, что из точки M к прямой CC'' восставлены два перпендикуляра — AM и BM. Совпасть эти перпендикуляры не могут, так как это означало бы, что точки A, B и M принадлежат одной и той же прямой, но это невозможно в силу того, что точки C и C''

(а значит, и весь отрезок) лежат по одну и ту же сторону от прямой AB.

Итак, мы пришли к тому, что при допущении несовпадения точек C и C' получится, что из одной и той же точки M к прямой CC'' можно восставить два различных перпендикуляра. Но это противоречит ранее установленным свойствам перпендикуляра. Следовательно, при наложении треугольников точка C' должна совпасть с точкой C, и мы получим, что $\triangle ABC = \triangle A B'C'$.

Вторым примером мы возьмем доказательство ранее высказанного предложения о том, что если две биссектрисы треугольника равны, то такой треугольник — равнобедренный.



Черт. 23.

Пусть мы имеем $\triangle ABC$ и его биссектрисы AM и BN (черт. 23).

Запишем теорему.

Дано: в $\triangle ABC$ $\angle CAM = \angle BAM$; $\angle CBN = \angle ABN$ и $AM = BN$.

Доказать: $AC = BC$.

Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что треугольник неравнобедренный и положим для определенности, что $AC > BC$. Если это так, то и $\angle ABC > \angle CAB$. Пронумеровав углы, как показано на чертеже, получим, что и $\angle 3 > \angle 1$. Сравним теперь $\triangle ABM$ и $\triangle ABN$; у них AB общая, $AM = BN$ по условию, а углы, заключенные между соответственно равными сторонами, не равны. Следовательно, против большего угла лежит и бо́льшая сторона, т. е. $AN > BM$. Проведем теперь через точку N отрезок ND, равный и параллельный AM. Тогда четырехугольник $AMDN$ будет параллелограмм и, значит, $MD = AN$ и $\angle 5 = \angle 2$. Соединяя B с D, получим $\triangle BDN$, который будет равнобедренным, так как $ND = AM = BN$. С другой стороны, в $\triangle BDM$ сторона $MD = AN$, но $AN > BM$ и, значит, $MD > BM$, откуда и $\angle 7 > \angle 6$. В то же время $\angle 4 > \angle 5$, так как $\angle 5 = \angle 2 = \angle 1$, а $\angle 4 = \angle 3$, но $\angle 3 > \angle 1$. Если сложить почленно неравенства $\angle 7 > \angle 6$ и $\angle 4 > \angle 5$, то получим: $\angle 4 + \angle 7 > \angle 5 + \angle 6$, т. е. $\angle BDN > \angle DBN$. Мы получили, что углы при основании равнобедренного $\triangle BDN$ не равны. Полученное противоречие заставляет нас отказаться от допущения того, что $AC > BC$. Подобным же образом мы могли бы опровергнуть допущение, что $BC > AC$. Итак, $AC = BC$.

Приведенные примеры достаточно уясняют характер доказательства от противного. К этому виду доказательства обычно прибегают тогда, когда при отыскании аргументов обнаруживается, что прямое доказательство трудно, а иногда и невозможно найти.

В этом случае берут предложение, противоречащее тому, которое должно быть доказано, и путем анализа стараются найти такую последовательность умозаключений, которая привела бы к предложению, явно противоречащему какому-нибудь из ранее установленных предложений. К таким явно противоречащим предложениям мы и пришли в двух последних примерах: в первом случае мы пришли к тому, что через одну точку к прямой можно провести два перпендикуляра, а во втором случае — к тому, что углы при основании равнобедренного треугольника не равны между собой.

§ 4. КАКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ МОЖНО ПРИНИМАТЬ БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА?

1. Ответим теперь на последний вопрос, поставленный во введении: какие предложения в геометрии можно принимать без доказательства?

На первый взгляд этот вопрос кажется очень простым. Каждый скажет, что принимать без доказательства можно аксиомы, а в качестве аксиом нужно брать предложения, истинность которых многократно проверялась и не вызывает никаких сомнений. Однако когда мы попробуем практически подобрать соответствующие предложения, то окажется, что сделать это не так-то просто.

В настоящее время известно очень большое число геометрических предложений, которые столь часто подвергались практической проверке, что едва ли кто-нибудь усомнится в их истинности. Но отсюда, конечно, вовсе не следует, что все эти предложения нужно признать за аксиомы. Для нас несомненно, например, что через две точки можно провести единственную прямую; что через данную точку к прямой можно провести один и только один перпендикуляр; что сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны; что два отрезка, равных одному и тому же третьему, равны и между собой;

что расстояние между двумя параллельными прямыми везде одинаково и т. д. Понятно, что число подобных предложений можно было бы во много раз увеличить. Почему бы все подобные предложения не принять за аксиомы? Ведь тогда изложение геометрии значительно упростилось бы, многие доказательства оказались бы излишними и т. д.

Но развитие геометрии не пошло по этому пути; наоборот, геометры стали добиваться того, чтобы число аксиом сделать возможно меньшим, а все остальное содержание геометрии вывести дедуктивным путем из этого небольшого числа основных истин.

Почему же они избрали именно этот, казалось бы более трудный и сложный, путь построения системы геометрических знаний?

Стремление построить геометрию, исходя из возможно меньшего числа аксиом, вызвано целым рядом причин. Прежде всего, при уменьшении числа аксиом естественно возрастает значение каждой отдельной аксиомы: не будем забывать того, что ведь эти аксиомы должны заключать в себе всю будущую геометрию, которую надлежит из них вывести. Поэтому, чем меньше аксиом, тем более общие, более глубокие и важные свойства пространственных форм будет раскрывать каждая отдельная аксиома.

Другой важной причиной, заставляющей нас возможно сокращать число аксиом, служит то обстоятельство, что при меньшем числе аксиом гораздо легче проверить их истинность и проследить за выполнением тех условий, которые предъявляются к совокупности аксиом (о них мы будег говорить дальше).

2. Итак, перед нами стоит задача отобрать возможно меньшее число основных, наиболее общих и важных предложений геометрии, которые мы примем за аксиомы. Чем мы должны руководствоваться при этом отборе? В первую очередь мы должны иметь в виду, что нельзя этот отбор производить поочередно, рассматривая одну аксиому за другой, вне связи с другими аксиомами. Принимать мы должны не одну изолированную аксиому, а *целую систему аксиом*, так как только такая система может правильно отобразить действительно существующие свойства и взаимоотношения основных пространственных форм материального мира.

Естественно, что в такую систему могут быть включены только многократно проверенные истины, отображающие наиболее общие, основные закономерности пространственных форм.

Далее, принимая такую систему аксиом, мы должны проследить за тем, чтобы в нее не вошли предложения, противоречащие одно другому, так как такие предложения не могут быть одновременно истинными. Нельзя, например, допустить, чтобы в системе были одновременно аксиомы: «Через данную точку к данной прямой можно провести одну единственную параллельную» и «Через данную точку к данной прямой нельзя провести ни одной параллельной».

Мало того, аксиомы не только не должны противоречить друг другу, но и среди следствий из аксиом не должно быть двух предложений, которые бы противоречили друг другу. Это основное требование, предъявляемое к системе аксиом, называется *условием непротиворечивости*.

Но одновременно с условием непротиворечивости мы также должны следить и за тем, чтобы в нашу систему аксиом не попало такое предложение, которое можно было бы доказать, опираясь на остальные аксиомы. Это требование станет вполне понятным, если вспомним, что мы хотим сделать нашу систему минимальной, т. е. содержащей наименьшее число недоказываемых предложений. Ведь если данное предложение можно доказать, опираясь на другие аксиомы, тогда оно уже не аксиома, а теорема, и нет необходимости включать его в систему аксиом. Требование, чтобы аксиома была недоказуема при помощи других аксиом, называется *условием независимости*.

Однако, стремясь сделать нашу систему аксиом возможно минимальной, мы не должны впадать в крайность и устранять из нашей системы такие предложения, на которые мы обязательно должны будем опираться при изложении геометрии.

В этом заключается третье условие, которому должна удовлетворять система аксиом — *условие полноты системы*. Точнее, это условие можно сформулировать так: если система *неполная*, то к ней можно всегда добавить новое предложение (понятно, предложение, содержащее те же самые основные понятия, что и остальные аксиомы), которое не будет зависеть от остальных теорем и не будет им противоречить. Если же система аксиом *полная*, то всякое новое предложение, присоединенное к этой системе и содержащее те же самые понятия, о которых идет речь в аксиомах, будет или следствием этих аксиом или будет им противоречить.

3. Для того чтобы нагляднее представить себе условия полноты, независимости и непротиворечивости системы аксиом, можно привести простой пример, который хотя и не является точным отображением геометрических соотношений, но дает довольно хорошую аналогию их.

Рассмотрим систему уравнений первой степени с тремя неизвестными. Каждое из неизвестных системы мы будем рассматривать как некоторое «понятие», подлежащее определению, а каждое уравнение — как своего рода «аксиому», при помощи которой устанавливаются соотношения между этими «понятиями».

Итак, пусть мы имеем систему

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3, \\ x + y + 4z &= 6. \end{aligned}$$

Можно ли из этой системы определить неизвестные x, y и z? Нет, так как здесь число уравнений меньше числа неизвестных. Система не удовлетворяет *условию полноты*.

Тогда мы попробуем исправить эту систему, дополнив ее еще одним уравнением:

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3, \\ x + y + 4z &= 6, \\ 3x + 3y + 12z &= 18. \end{aligned}$$

Внимательно рассмотрев получившуюся систему, мы убедимся, что внесение нового уравнения положения не изменило, так как третье уравнение есть простое следствие второго и никаких новых соотношений это уравнение не дает. В системе нарушено *условие независимости*.

Изменим теперь третье уравнение и рассмотрим такую систему:

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3, \\ x + y + 4z &= 6, \\ 3x + 3y + 12z &= 15. \end{aligned}$$

Опять нетрудно убедиться, что и эта система непригодна для определения неизвестных.

Действительно, разделив обе части последнего уравнения на 3, мы получим уравнение

$$x + y + 4z = 5.$$

Второе же уравнение дает нам:

$$x + y + 4z = 6,$$

Какому же из этих уравнений верить? Ясно, что мы имеем налицо *противоречивую* систему, из которой также нельзя определить неизвестные.

Если, наконец, мы рассмотрим систему

$$2x - y - 2z = 3,$$
$$x + y + 4z = 6,$$
$$2x + y + 5z = 8,$$

то легко убедимся, что система имеет единственное решение ($x = 5$, $y = 13$, $z = -3$), она является непротиворечивой, независимой и полной. Если к системе приписать еще четвертое уравнение, связывающее x, y и z, то оно будет либо следствием данных трех уравнений, либо будет им противоречить.

4. Отсюда мы видим, что выбор аксиом, которые должны быть положены в основу геометрии, далеко не произволен, а подчинен очень серьезным требованиям. Работа по установлению необходимой системы аксиом геометрии была начата еще в конце прошлого столетия и хотя в этом направлении учеными сделано очень много, но все же ее нельзя еще считать окончательно завершенной и в настоящее время. Дело в том, что, подвергая имеющуюся систему аксиом систематическому пересмотру, ученые временами обнаруживают, что в этой системе есть лишние, т. е. «зависимые», аксиомы, являющиеся следствием более простых и общих аксиом, поэтому предложения сложные, заключающие в себе значительное число условий, заменяются аксиомами с меньшим числом условий и т. д. Все эти исследования представляют большой интерес для науки, так как они направлены к тому, чтобы выяснить, какие наиболее общие, глубокие и важные свойства пространственных форм определяют все содержание геометрии.

Чтобы дать некоторое представление о системе аксиом современной геометрии, обратимся сначала к школьному изложению геометрии и посмотрим, на каких аксиомах она строится и каких аксиом ей нехватает. Ограничимся при этом аксиомами планиметрии.

Изложение курса геометрии в школе начинается с выяснения основных понятий геометрии: тела, поверхности, линии, точки. Далее из всех линий выделяется прямая, а из всех поверхностей — плоскость. Первые аксиомы школьного курса устанавливают соотношения между точкой, прямой и плоскостью. Эти аксиомы относятся к группе *аксиом сочетания* — первой группе в полной системе аксиом геометрии.

Аксиомы этой группы устанавливают, как «сочетаются» между собой основные геометрические образы: сколькими точками определяются прямая и плоскость, при каких условиях прямая принадлежит плоскости и т. д.

Из группы аксиом сочетания в школьном курсе упоминаются только две:

1) *Через две точки можно провести одну и только одну прямую.*

2) *Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости.*

В то же время мы постоянно, сознательно или бессознательно, пользуемся и другими аксиомами сочетания, из которых для обоснования планиметрии нужны еще и следующие:

3) *На каждой прямой имеется по крайней мере две точки.* Эта аксиома, как мы видим, содержит очень ограниченное требование. Однако дальше при помощи аксиом порядка можно будет доказать существование бесчисленного множества точек на прямой.

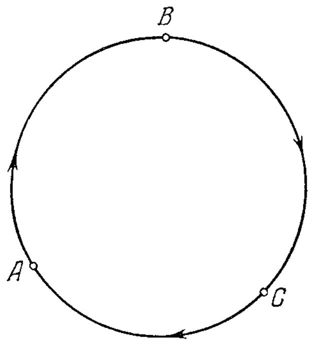
4) *Существуют на плоскости по крайней мере три точки, не лежащие на одной и той же прямой.* Эта аксиома также содержит минимальное требование, на основе которого дальше можно будет доказать существование бесчисленного множества точек на плоскости.

5. Переходим ко второй группе аксиом, которая совершенно отсутствует в школьном курсе, хотя пользоваться ими приходится на каждом шагу. Аксиомы второй группы называются *аксиомами порядка*. Этими аксиомами описываются те закономерности, которым подчиняется взаимное положение точек на прямой и взаимное положение точек и прямых на плоскости. Этими аксиомами мы часто пользуемся, хотя и в неявной форме. Если, например, нам нужно продолжить отрезок, то мы это делаем, зная, что отрезок всегда можно продолжить и в ту и в другую сторону.

Если мы соединяем две точки, лежащие по разные стороны от прямой, то мы уверены, что полученный отрезок пересечет эту прямую. На это мы опирались, например, при доказательстве теоремы о равенстве треугольников по двум сторонам и углу, лежащему против одной из этих сторон (см. черт. 12). Еще пример: мы уверены, что биссектриса внутреннего угла треугольника непременно пересечет противоположную сторону.

Бесспорно, что во всех этих случаях мы встречаемся с фактами весьма очевидными, но ведь они говорят о существовании некоторых основных свойств геометрических фигур, которыми мы постоянно пользуемся и которые поэтому нужно изложить в аксиомах.

Аксиомы, которые определяют расположение точек на прямой, связаны с основными понятиями «предшествовать» и «следовать» и формулируются так:



Черт. 24.

1) *Из двух точек, лежащих на одной и той же прямой, любую можно принять за предшествующую, тогда вторая будет следующей.*

2) *Если A, B, C — точки одной и той же прямой и если A предшествует B, B предшествует C, то A предшествует C.*

Уже эти две аксиомы достаточно отчетливо выделяют характерные свойства прямой, присущие не всем линиям. Возьмем, например, окружность (черт. 24) и, двигаясь по ней в направлении движения стрелки часов, поставим последовательно точки A, B, C; тогда мы убедимся, что на окружности точка A предшествует точке B, точка B предшествует точке C, а точка C вновь предшествует точке A. При вышеуказанном расположении точек A, B и C на прямой мы говорим, что B лежит *между* A и C (черт. 25).

Черт. 25.

3) *Между каждыми двумя точками на прямой всегда существует еще точка той же прямой.*

Применяя последовательно эту аксиому к двум точкам на прямой (они существуют в силу второй аксиомы сочетания), потом к каждому из полученных промежутков и т. д., получим, что между каждыми двумя точками на прямой существует бесчисленное множество точек этой же прямой.

Часть прямой, которой принадлежат две ее точки и все промежуточные точки, называется *отрезком*.

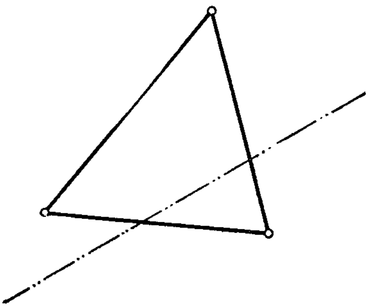
4) *Для каждой точки прямой существует как предшествующая точка, так и последующая.*

Из этой аксиомы следует возможность продолжать отрезок прямой и в ту и в другую сторону. Отсюда же вытекает то, что на прямой нет точки, которая предшествовала бы всем остальным ее точкам или следовала бы за всеми остальными ее точками, т. е. то, что *прямая не имеет концов.*

Часть прямой, содержащая данную точку и все предшествующие или данную точку и все последующие, называется *лучом* или *полупрямой.*

Взаимное положение точек и прямых на плоскости определяется следующей аксиомой, называемой «аксиомой Паша» по имени впервые сформулировавшего ее германского математика:

5) *Если даны три точки, не лежащие на одной и той же прямой, то прямая той же плоскости, не проходящая через эти точки и пересекающая один из отрезков, определяемых этими точками, пересекает еще один и только один отрезок* (черт. 26).



Черт. 26.

При помощи этой аксиомы доказывается теорема о разделении прямою плоскости на две полуплоскости. Приведем доказательство этой теоремы как пример строгого доказательства, опирающегося только на аксиомы и ранее доказанные предложения. Теорему мы сформулируем следующим образом.

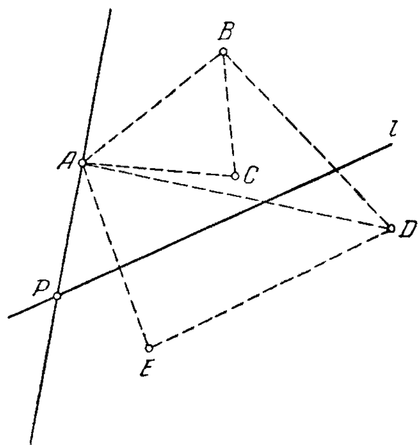
Всякая прямая, проходящая по плоскости, разделяет все не принадлежащие ей точки плоскости на два класса так, что дзе точки из одного и того же класса определяют отрезок, не пересекающий прямую, а дзе точки из разных классоз определяют отрезок, пересекающий прямую.

При доказательстве мы будем пользоваться для сокращения записи некоторыми специальными знаками, которые необходимо запомнить.

$\subset$ — знак *принадлежности*: $A \subset a$ — «точка A принадлежит прямой a». $\times$ — знак *пересечения*: $AB \times a$ — «отрезок AB пересекает прямую a». Черта над каким-нибудь соотношением обозначает его *отрицание*: $\overline{A \subset a}$ — «точка A *не* принадлежит прямой a». $\therefore$ — знак *вывода* — «а потому . . .».

Установив это, переходим к доказательству теоремы. Прежде всего заметим, что *если три точки лежат на одной и той же прямой, то для них имеет место предложение, аналогичное аксиоме Паша: прямая, пересекающая один из трех отрезков, определяемых этими точками, пересекает и еще один и только один отрезок.* Это предложение легко доказать, опираясь на аксиомы расположения точек на прямой.

Действительно, если точки A, B и C лежат на одной и той же прямой и точка B лежит между A и C, то все точки отрезков AB и BC принадлежат отрезку AC, а каждая точка отрезка AC (исключая B) принадлежит либо AB, либо BC. Поэтому прямая, пересекающая AB или BC, непременно пересекает и AC, а прямая, пересекающая AC, пересечет или AB, или BC.



Черт. 27.

Пусть теперь мы имеем на плоскости прямую l. Нам нужно доказать следующее:

1) При помощи прямой l можно разбить не принадлежащие этой прямой точки плоскости на классы.

2) Классов может быть два и только два.

3) Классы обладают свойствами, указанными в теореме.

Чтобы установить это, возьмем вне прямой l точку A (черт. 27) и примем следующие условия:

а) точка A принадлежит к *первому* классу (обозначим его K_1);

б) не принадлежащая l точка принадлежит к *первому* классу, если эта точка с точкой A определяет отрезок, не пересекающий l;

в) не принадлежащая l точка принадлежит ко *второму* классу (обозначим его K_2), если она с точкой A определяет отрезок, пересекающий l.

Легко убедиться, что существуют точки того и другого класса. Для этого возьмем на прямой l точку P и проведем прямую PA. Луч с вершиной P, содержащий точку A, содержит только точки первого класса, так как точка пересечения P лежит вне отрезков, определяемых точкой A и остальными точками луча. Противоположный луч с той же вершиной содержит только точки второго класса, так как точка пересечения P лежит внутри всех отрезков, определяемых точкой A и точками этого луча. Соединяя A с любой точкой прямой l, мы получим бесчисленное множество прямых, содержащих точки первого и второго класса.

Классов может быть *только два*, так как по отношению к любому отрезку, соединяющему A с точкой, не принадлежащей l, мы можем высказать *только два* предложения: либо отрезок пересекает l, либо не пересекает, — ничего третьего быть не может.

Покажем, наконец, что классы K_1 и K_2 удовлетворяют условиям теоремы. Рассмотрим следующие случаи:

1) Обе точки принадлежат к первому классу: $B \subset K_1$, $C \subset K_1$. Так как $B \subset K_1$, то $\overline{AB \times l}$; так как $C \subset K_1$, то $\overline{AC \times l}$. $\therefore$ на основании аксиомы Паша $\overline{BC \times l}$.

2) Обе точки принадлежат ко второму классу $D \subset K_2$ и $E \subset K_2$. Так как $D \subset K_2$, то $AD \times l$, так как $E \subset K_2$, то $AE \times l$. $\therefore$ на основании аксиомы Паша $\overline{DE \times l}$.

3) Точки принадлежат к разным классам: $B \subset K_1$; $D \subset K_2$. Так как $B \subset K_1$, то $\overline{AB \times l}$, так как $D \subset K_2$, то $AD \times l$. $\therefore$ на основании аксиомы Паша $BD \times l$.

Теорема доказана.

Часть плоскости, содержащая все точки одного и того же класса, называется *полуплоскостью*.

Заметим, что доказательство этой теоремы можно было провести, совсем не пользуясь чертежом. Чертеж только помогает следить за ходом рассуждений и удерживать в памяти полученные соотношения. Впрочем, это замечание можно отнести к любому, достаточно строгому доказательству.

6. Следующая, третья, группа аксиом геометрии связана с понятием *равенства*. В школьном курсе геометрии равенство фигур на плоскости устанавливается при помощи наложения одной фигуры на другую.

В стабильном учебнике геометрии по этому вопросу сказано следующее: «Геометрические фигуры могут перемещаться в пространстве, не подвергаясь никаким изменениям. Две геометрические фигуры называются равными, если перемещением одной из них в пространстве ее можно совместить со второй фигурой так, что обе фигуры совместятся во всех своих частях».

На первый взгляд это определение равенства кажется вполне понятным, но если внимательно разобраться в нем, то нетрудно обнаружить в этом определении логический круг. Действительно, для определения равенства фигур мы их должны совместить друг с другом, а для совмещения мы должны одну фигуру *переносить* в пространстве, причем эта фигура в процессе перемещения остается *неизменной*. Но что это значит «оставаться неизменной»? Это значит, что фигура все время остается равной некоторому своему первоначальному образу. Итак, у нас получилось, что понятие «равенства» мы определяем при помощи перенесения «неизменной фигуры», а понятие «неизменной фигуры» мы определяем при помощи понятия «равенства».

Поэтому оказывается гораздо более целесообразным равенство фигур обосновать при помощи группы аксиом, относящихся к равенству отрезков, углов и треугольников.

Аксиомы, устанавливающие свойства равенства отрезков, следующие:

1) *На данной прямой, в данном направлении от данной точки можно отложить один и только один отрезок, равный данному.*

2) *Каждый отрезок равен самому себе. Если первый отрезок равен второму, то и второй равен первому. Два отрезка, равные одному и тому же третьему, равны и между собой.*

3) *Если A, B и C лежат на одной и той же прямой, A', B', C' — тоже на одной и той же прямой и если $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, то и $AC = A'C'$.*

Другими словами, если к равным отрезкам прибавить равные, то и суммы будут равные.

Совершенно аналогичные аксиомы имеют место для углов.

4) *При данном луче, в данной полуплоскости можно построить один и только один угол, равный данному.*

5) *Каждый угол равен самому себе. Если первый угол равен второму, то и второй равен первому. Если два угла равны одному и тому же третьему, то они равны и между собой.*

6) *Если a, b, c — лучи с общей вершиной, a', b', c' — другие лучи с общей вершиной и если $\angle ab = \angle a'b'$, $\angle bc = \angle b'c'$, то и $\angle ac = \angle a'c'$.*

Другими словами, если к равным углам прибавить равные, то и суммы будут равные.

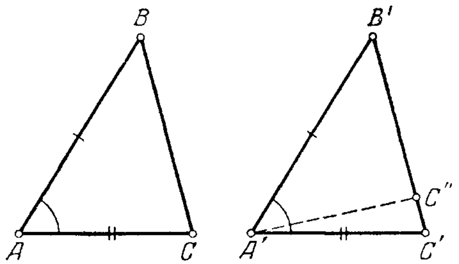
Наконец, для обоснования равенства треугольников вводится еще одна аксиома третьей группы.

7) *Если две стороны и заключенный между ними угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и заключенному между ними углу другого треугольника, то у этих треугольников соответственно равны и другие углы.* Например, если мы имеем $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$, если при этом $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\angle A = \angle A'$, то и $\angle B = \angle B'$ и $\angle C = \angle C'$.

На основании этих семи аксиом доказываются сначала основные признаки равенства треугольников, а дальше и все основанные на этих признаках теоремы о равенстве фигур. При этом приемом наложения уже нигде не приходится пользоваться, он становится излишним.

Посмотрим, например, как доказывается первый признак равенства треугольников.

Пусть даны $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ (черт. 28), в которых $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\angle A = \angle A'$. Нужно доказать, что



Черт. 28.

равны и все остальные элементы треугольников. По аксиоме 7 мы сразу получим, что $\angle B = \angle B'$ и $\angle C = \angle C'$. Остается показать, что и $BC = B'C'$. Предположим, что $BC \neq B'C'$. Тогда на стороне $B'C'$ от точки B' отложим $B'C'' = BC$. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C''$. У них $AB = A'B'$, $BC = BC''$ и $\angle B = \angle B'$. Тогда по аксиоме 7 и $\angle B'A'C'' = \angle A$. Но два угла, равных одному и тому же третьему, равны и между собой, поэтому $\angle B'A'C'' = \angle B'A'C'$. Мы получили, что при луче $A'B'$ в одной и той же полуплоскости построены два различных угла, равных одному и тому же углу A, что противоречит аксиоме 4. Итак, отказавшись от предположения $BC \neq B'C'$, мы получим $BC = B'C'$.

Подобным же образом доказываются и остальные теоремы о равенстве фигур.

7. Дальнейшее изложение элементарной геометрии встречается с необходимостью ввести еще одну группу аксиом, именно, *аксиомы непрерывности*. Задачи пересечения прямой с окружностью и пересечения окружностей между собой тесно связаны с этой группой аксиом. Все геометрические построения при помощи циркуля и линейки опираются именно на эти задачи. Это обстоятельство указывает на чрезвычайно большую важность аксиом непрерывности. Кроме того, на аксиомах непрерывности построена и вся теория измерения геометрических величин.

В группе аксиом непрерывности содержатся следующие две аксиомы:

1) Аксиома Архимеда. *Если даны два отрезка, из которых первый больше второго, то, повторяя меньший отрезок слагаемым достаточно большое число раз, мы всегда можем получить сумму, превосходящую больший отрезок.* Короче говоря, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — два отрезка, причем $\overline{a} > \overline{b}$, то существует такое целое число n, что $n\overline{b} > \overline{a}$.

Аксиома Архимеда помещена и в стабильном учебнике — в главе об измерении отрезков. Способ отыскания общей меры двух отрезков последовательным отложением, о котором мы упоминали выше, опирается на аксиому Архимеда. Действительно, при этом способе меньший отрезок откладывается на большем и аксиома Архимеда дает нам уверенность в том, что при таком отложении сумма меньших отрезков в конце концов перекроет больший отрезок.

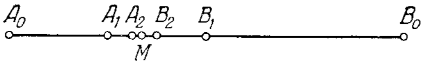
Непосредственно из аксиомы Архимеда мы заключаем, что если отрезок $\overline{a}$ больше отрезка $\overline{b}$, то всегда существует такое целое число n, что $\frac{\overline{a}}{n} < \overline{b}$.

Вторая аксиома непрерывности называется аксиомой Кантора, или аксиомой о вложенных стягивающихся отрезках. Текст ее таков:

2) *Если имеется система отрезков, в которой каждый последующий находится внутри предыдущего, и если в этой системе всегда можно найти отрезок, меньший*

любого данного отрезка, то существует единственная точка, лежащая внутри всех этих отрезков.

Чтобы показать применение аксиомы Кантора, рассмотрим такой пример. Возьмем отрезок A_0B_0 (черт. 29), середину его назовем B_1 и найдем середину отрезка A_0B_1, которую назовем A_1. Далее берем середину A_1B_1, которую называем B_2, и находим середину отрезка A_1B_2, которую называем A_2. Потом берем середину A_2B_2, которую называем B_3, находим середину A_2B_3 и называем ее A_3. Потом берем середину A_3B_3 и т. д. [1]). Отрезки A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... и т. д. представляют собой систему вложенных стягивающихся отрезков. Действительно, каждый последующий отрезок находится внутри предыдущего и равен $\frac{1}{4}$ предыдущего. Таким образом, длина отрезка A_1B_1 равна $\frac{1}{4}A_0B_0$, длина $A_2B_2=\frac{1}{16}A_0B_0$, $A_3B_3=\frac{1}{64}A_0B_0$, ..., и вообще $A_nB_n=\frac{A_0B_0}{4^n}$.



Черт. 29.

Из аксиомы Архимеда следует, что полученная длина $\frac{A_0B_0}{4^n}$ при достаточно большом n может стать меньше любого данного отрезка. Таким образом, все условия аксиомы выполнены, и существует единственная точка, лежащая внутри всей системы отрезков. Эту точку нетрудно указать. Действительно, если взять точку M на $\frac{1}{3}$ отрезка A_0B_0, т. е. чтобы $A_0M=\frac{1}{3}A_0B_0$, то эта точка и будет искомой. В самом деле, если взять точку A_0 за начало отсчета на числовой оси, а отрезок A_0B_0 принять за единицу, то точкам A_1, A_2, A_3, ..., A_n будут соответствовать числовые значения

$$\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}=\frac{5}{16};\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}=\frac{21}{64};\ \ldots;\frac{1+4+4^2+\ldots+4^{n-1}}{4^n}.$$

Каждая из этих дробей меньше $\frac{1}{3}$.

---

1) Отрезок A_3B_3 на чертеже уже не помещается, его приходится вообразить себе.

Действительно, если знаменатель каждой из этих дробей уменьшить на единицу, то дробь увеличится и станет равной как раз $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1+4+4^2+\ldots+4^{n-1}}{4^n-1}=\frac{1+4+4^2+\ldots+4^{n-1}}{(4-1)(1+4+4^2+\ldots+4^{n-1})}=\frac{1}{3}\ ^{1)}.$$

С другой стороны, точкам B_1, B_2, B_3, $\ldots$, B_n соответствуют числовые значения

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8};\ \frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{32}=\frac{11}{32};\ \ldots;$$
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{32}-\ldots-\frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Числовое значение, соответствующее точке B_1, может быть записано еще и в таком виде:

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{2^{2n+1}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\ldots-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Если произвести сложение этих чисел, то получим:

$$\frac{2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\ldots-2^3+2^2-2+1}{2^{2n+1}}.$$

Отсюда нетрудно получить, что каждое из числовых значений, соответствующих точкам B_1, B_2, $\ldots$, B_n, *больше* $\frac{1}{3}$. Увеличив знаменатель дроби на единицу, мы тем самым дробь уменьшим и получим:

$$\frac{2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\ldots-2^3+2^2-2+1}{2^{2n+1}+1}=$$
$$=\frac{2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\ldots-2^3+2^2-2+1}{(2+1)(2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\ldots-2^3+2^2-2+1)}=\frac{1}{3}\ ^{2)}.$$

Итак, все числовые значения, соответствующие точкам B_1, B_2, B_3, $\ldots$, B_n, $\ldots$, больше $\frac{1}{3}$. Отсюда следует, что

---

[1]) При этом мы пользуемся формулой
$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

[2]) При этом мы пользуемся формулой
$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n}).$$

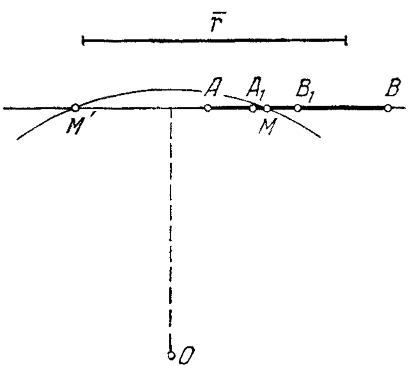
точка M, которой соответствует числовое значение $\frac{1}{3}$, находится внутри каждого из отрезков A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, ... Следовательно, это и есть единственная точка, определяемая последовательностью этих отрезков.

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы о пересечении прямой с окружностью.

Напомним, что окружность определяется своим центром и радиусом. Точки плоскости, расстояние которых от центра меньше радиуса, называются *внутренними* по отношению к окружности, точки, расстояние которых от центра больше радиуса, называются *внешними* по отношению к окружности. Основная теорема формулируется так:

Отрезок, соединяющий внутреннюю точку по отношению к окружности с внешней, имеет с окружностью одну и только одну общую точку.

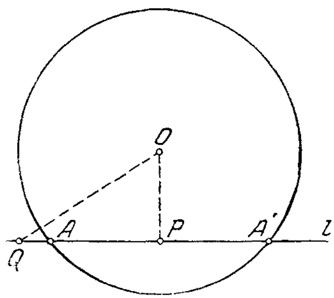
Пусть нам дана окружность с центром O и радиусом r, A — внутренняя точка ($OA < r$), B — внешняя точка ($OB > r$) (черт. 30). Докажем прежде всего, что если на AB существует точка M, расстояние которой от точки O равно радиусу, то такая точка единственная. Действительно, если такая точка M существует, то существует и точка M', симметричная с M по отношению к перпендикуляру, опущенному из O на прямую AB, причем $M'O = MO = r$. По свойству наклонных, проведенных из точки к прямой AB, все внутренние точки отрезка $M'M$ будут и внутренними точками окружности, а внешние точки отрезка $M'M$ будут и внешними точками окружности. Поэтому точка A должна всегда лежать между точками M' и M, а на отрезке AB может лежать только одна точка M.



Черт. 30.

Установив это, разделим отрезок AB пополам и сравним с радиусом расстояние от полученной точки до центра. Если это расстояние окажется равным радиусу, то теорема будет доказана. Если это расстояние будет меньше радиуса, то точка будет внутренней и мы назовем ее A_1. Если это расстояние будет больше радиуса, то точка будет внешней и мы назовем ее B_1.

Далее мы возьмем середину отрезка A_1B (или AB_1), по отношению к которой вновь будут возможны три случая: либо расстояние ее от центра равно радиусу, и тогда теорема будет доказана, либо оно меньше радиуса, и тогда мы эту точку обозначим буквой A с соответствующим номером, либо оно больше радиуса, и тогда мы эту точку обозначим буквой B с соответствующим номером. Продолжая неограниченно этот процесс, мы получим, что или расстояние одной из таких точек от центра будет равно радиусу, и тогда теорема будет доказана, или что все точки, обозначенные буквами $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ будут внутренними, а обозначенные буквами $B_1, B_2, \ldots, \ldots, B_n, \ldots$ — внешними. Но в этом последнем случае мы получим систему отрезков, удовлетворяющих условиям аксиомы Кантора, так как каждый последующий отрезок лежит внутри предыдущего и длина каждого последующего вдвое меньше длины предыдущего. Значит, существует единственная точка, лежащая внутри всех этих отрезков. Так как она лежит между всеми внутренними и между всеми внешними точками отрезка, то она не может быть ни внутренней, ни внешней; следовательно, это есть точка окружности.



Черт. 31.

Из этой теоремы, в частности, следует, что если расстояние прямой от центра окружности меньше радиуса, то эта прямая имеет с окружностью две и только две общие точки. Действительно, пусть O — центр и r — радиус окружности (черт. 31). Расстояние OP от центра до прямой l меньше радиуса; следовательно, P — внутренняя точка. Отложим на прямой l от точки P отрезок $PQ = r$.

Так как в прямоугольнике треугольнике OPQ гипотенуза OQ больше катета $PQ = r$, то $OQ > r$ и, значит, Q — внешная точка. По доказанной теореме отрезок PQ имеет с окружностью единственную общую точку A. Вторая общая точка A' симметрична с A по отношению к перпендикуляру OP. Так как все внутренние точки отрезка AA' являются и внутренними точками окружности, а все внешние — внешними относительно той же окружности, то других общих точек прямая l с окружностью не имеет.

Предложения, аналогичные аксиомам Архимеда и Кантора, можно доказать для дуг окружности, т. е. можно доказать:

1) *Повторяя данную дугу слагаемым достаточно большое число раз, мы можем получить дугу, бóльшую любой наперед заданной дуги.*

2) *Если имеется система дуг, в которой каждая последующая дуга лежит внутри предыдущей, и если в системе всегда можно найти дугу, меньшую любой данной дуги, то существует точка, лежащая внутри всех этих дуг.*

Опираясь на эти предложения, легко доказать основную теорему о пересечении окружностей:

Если A — внутренняя, а B — внешняя точка по отношению к данной окружности, то дуга всякой другой окружности, соединяющая A и B, имеет с данной окружностью одну и только одну общую точку.

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы о пересечении окружности с отрезком.

8. Последняя, пятая, группа аксиом геометрии связана с понятием *параллельности* и содержит всего лишь одну аксиому:

Через точку, не принадлежащую данной прямой, можно к этой прямой провести одну и только одну параллельную прямую.

Предложения, опирающиеся на эту аксиому, общеизвестны, и мы на них останавливаться не будем.

Рассмотренная нами система аксиом дает достаточное представление о совокупности недоказываемых предложений, которую можно положить в основу геометрии. Следует, впрочем, заметить, что, стремясь по возможности упростить изложение, мы не старались эту систему сделать минимальной по количеству. Число этих аксиом можно было бы еще уменьшить. Например, две аксиомы Архимеда и Кантора можно было бы заменить одной — так называемой аксиомой Дедекинда. Можно было бы несколько ослабить требования, содержащиеся в аксиомах. Например, в аксиоме Паша можно было бы не требовать, чтобы прямая, пересекающая одну из сторон треугольника, пересекла еще одну и *только* одну сторону. Оказывается, можно сохранить только требование, чтобы прямая, пересекающая одну из сторон треугольника, пересекла бы и еще сторону треугольника, а то, что эта сторона будет *только* одна, можно доказать. Точно так же в формулировке аксиомы Кантора можно не требовать того, чтобы точка, определяемая системой вложенных стягивающихся отрезков, была единственной. Единственность этой точки также можно доказать. Однако все это осложнило бы и удлинило изложение.

Подведем итоги всему сказанному в этой книжке.

1) Мы определили геометрию как науку о пространственных формах материального мира.

2) Первоначальное знание свойств пространственных форм мы получили путем индукции, т. е. путем неоднократно повторявшихся наблюдений и опытов.

3) Наиболее глубокие и общие пространственные свойства вещей мы формулируем в виде системы основных предложений — аксиом.

4) Система аксиом только тогда правильно отображает действительно существующие пространственные свойства, если она удовлетворяет условиям полноты, независимости и непротиворечивости.

5) Помимо аксиом, все остальные предложения геометрии — теоремы — получаются при помощи дедукции, т. е. путем выводов из аксиом и ранее доказанных теорем. Эта система выводов называется доказательством.

6) Чтобы доказательство было правильным, т. е. чтобы была несомненной истинность доказываемой теоремы, оно должно быть построено на правильных умозаключениях и свободно от ошибок. Правильность доказательства зависит от: 1) точной, правильной формулировки доказываемого предложения, 2) выбора необходимых и истинных аргументов и 3) строгого соблюдения логических правил в ходе доказательства.

Читателю, желающему более основательно познакомиться с вопросом о математическом доказательстве, можно рекомендовать следующую литературу.

1) Общие руководства по логике:

М. С. Строгович, Логика. Госполитиздат, 1949.

В. Ф. Асмус, Логика, 1947.

Н. В. Таванец, Суждение и его виды. Изд-во Академии наук СССР, 1953.

2) Вопрос об основных предложениях и системе аксиом геометрии, а также о доказательстве освещен в книгах:

Ж. Адамар, Элементарная геометрия. Учпедгиз, 1948. Вопрос о доказательстве разобран в «Прибавлении».

Д. Гильберт, Основание геометрии. ОГИЗ, 1948. Вопрос о сущности аксиоматического метода рассматривается в вводной статье П. К. Рашевского.

Я. С. Дубнов, Ошибки в геометрических доказательствах. Гостехиздат, 1953. В книге приведено много примеров ошибочных доказательств и разобраны различные ошибки.

И. С. Градштейн, Прямая и обратная теоремы. Гостехиздат, 1950. Книга посвящена вопросу о соотношениях между прямой и обратной теоремами.

3) Сборники упражнений и задач, содержащие задачи на доказательство:

Много интересных задач на доказательство содержится в уже упомянутом курсе геометрии Ж. Адамара. Задачи снабжены подробными решениями проф. Д. И. Перепелкина.

Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, Геометрия. Гостехиздат, 1952.

Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский, Математические беседы. Гостехиздат, 1952.

Б. Н. Делоне и О. К. Житомирский, Задачник по геометрии. Гостехиздат, 1951.

Б. Н. Делоне, О. К. Житомирский, А. И. Фетисов, Сборник геометрических задач. Учпедгиз, 1951.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3
§ 1. Что такое доказательство? 5
§ 2. Зачем нужно доказательство? 9
§ 3. Каким должно быть доказательство? 16
§ 4. Какие предложения геометрии можно принимать без доказательства? 39

А. И. Фетисов.

О доказательстве в геометрии.

Редактор *Г. Л. Смолян.*

Техн. редактор *С. Н. Ахламов.*

Корректор *Н. В. Казанская.*

*

Сдано в набор 11/V 1954 г. Подписано к печати 15/VII 1954 г. Бумага $84 \times 108/_{32}$. Физ. печ. л. 1,875. Условн печ. л. 3,08. Уч.-изд. л. 3 02. Тираж 50 000 экз. Т-04863. Цена книги 90 коп. Заказ № 1410.

*

Государственное издательство
технико-теоретической литературы
Москва, Б. Калужская, 15.

*

4-я типография им. Евг. Соколовой
Союзполиграфпрома Главиздата
Министерства культуры СССР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.