

А. Пуанкаре

ТЕОРИЯ ВИХРЕЙ



R&C
Dynamics

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS
PUBLIÉS PAR L'ASSOCIATION AMICALE DES ÉLÈVES ET ANCIENS
ÉLÈVES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

THÉORIE
DES
TOURBILLONS

par

H. POINCARÉ, MEMBRE DE L'INSTITUT

PARIS

GEORGES CARRÉ, ÉDITEUR

1893

А. Пуанкаре

ТЕОРИЯ ВИХРЕЙ

Перевод с французского и редакция
А. В. Борисова и А. А. Килина

Научно-издательский центр
«Регулярная и хаотическая динамика»

2000

УДК 530

Пуанкаре А.

Теория вихрей. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 160 стр.

Книга представляет собой курс лекций А. Пуанкаре, являющихся составной частью курса математической физики. В них развиваются идеи Гельмгольца и содержатся результаты самого автора.

Полезна широкому кругу читателей — физикам, математикам, историкам науки.

ISBN 5-93972-021-8

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000

Анри Пуанкаре

ТЕОРИЯ ВИХРЕЙ

Научный редактор А. В. Борисов

Дизайнер М. В. Ботя

Технический редактор А. В. Широбоков

Компьютерная подготовка И. В. Рыловой, С. В. Высоцкого

Компьютерная графика М. А. Дьячковой

Корректор М. А. Ложкина

Лицензия ЛУ № 084 от 03.04.00. Подписано к печати 13.11.00.

Формат 60 × 84¹/₁₆. Усл. печ. л. 9,3. Уч. изд. л. 9,43.

Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная № 1.

Печать офсетная. Тираж 1000 экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»

426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.

<http://www.rcd.ru> E-mail: subscribe@uni.udm.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».

610033, г. Киров, ул. Московская, 122.

Содержание

Предисловие редактора	6
Введение	8
ГЛАВА 1. Теорема Гельмгольца	9
ГЛАВА 2. Следствия из теоремы Гельмгольца	31
ГЛАВА 3. Определение компонент скорости как функций компонент вихря. Частный случай жидкости	39
ГЛАВА 4. Движение вихревых трубок	63
ГЛАВА 5. Случай двух вихревых трубок, метод изображе- ний	73
ГЛАВА 6. Метод конформного отображения	81
ГЛАВА 7. Движение вихревых трубок. Основные теоремы. Трубки вращения	99
ГЛАВА 8. Условия устойчивости установившегося движе- ния	124
ГЛАВА 9. Жидкость, обладающая свободной поверхностью	139
ГЛАВА 10. Влияние вязкости жидкостей	147

Предисловие редактора

С 1885 года А. Пуанкаре прочитал на разных кафедрах в Сорбонне несколько курсов лекций. Среди них курсы термодинамики, небесной механики, электростатики, оптики, теории вероятностей, распространения тепла, упругости, ньютоновского потенциала и др. Теория вихрей в этом списке занимает особую роль. Она объединяет в себе результаты, изложенные А. Пуанкаре в нескольких курсах. В частности на этот курс обычно ссылаются как на единственный, в котором систематически обсуждается аналогия между гидродинамикой и электростатикой.

Вместе с тем А. Пуанкаре излагает почти все известные к тому времени результаты, которые давно стали классическими. С различных сторон и точек зрения обсуждается теория Гельмгольца, приводятся несколько задач, разобранных Кирхгофом. В этом курсе А. Пуанкаре также приводит ряд своих результатов, хотя и ни один из результатов не обладает той законченностью и полнотой, как, например, в небесной механике. Следует особо отметить, что, подобно остальным курсам лекций А. Пуанкаре, курс «Теория вихрей» содержит много неточностей и не совсем законченных рассуждений. Одну из частей своего курса, посвященную идее Гельмгольца об образовании туманов, он так и не опубликовал, как пишет А. Пуанкаре в своем «Аналитическом резюме» — «так как я не пришел к заключениям, которые меня бы удовлетворили».

Вообще говоря, по мнению многих известных математиков сорбонские лекции не вполне отражают тот математический гений, который был присущ Пуанкаре и который присутствует в его научных работах. Также особо следует отметить, что с исторической точки зрения Пуанкаре не всегда ссылается на многие, даже хорошо известные факты и результаты, и поэтому курс не может быть рекомендован для первого чтения, а скорее может быть использован как некоторое дополнительное руководство.

После Пуанкаре теория вихрей претерпела значительные изменения. Прежде всего следует подчеркнуть развитие ее прикладных ас-

пектов, создание феноменологической модели, вихревого обтекания тел жидкостью (метод дискретных вихрей), теории пограничного слоя. Результаты Жуковского, Чаплыгина, Прандтля позволили в первой половине XX века создать общую теорию подъемной силы и решить различные задачи прикладной аэродинамики.

Теоретические вопросы теории вихрей также остаются предметом интенсивного обсуждения. Для получения представления о современном уровне теории вихрей российскому читателю следует рекомендовать две недавно вышедшие в издательстве РХД книги: книгу В. В. Козлова «Общая теория вихрей», посвященную общему формализму вихревой теории и ее связям с различными областями математической физики, оптики, теоретической механики, а также книгу А. В. Борисова и И. С. Мамаева «Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике», в которой разобраны многие классические и современные задачи динамики точечных вихрей, а также дана их новая интерпретация с точки зрения современной алгебраической теории и топологических методов. Гидродинамическим аспектам теории вихрей посвящена книга Ф. Дж. Сэффмэна «Динамика вихрей», вышедшая в 2000 году в издательстве «Научный мир». В заключении следует подчеркнуть, что за прошедшие годы книга Пуанкаре не утратила своего значения, она по-прежнему остается весьма доступным и интересным введением в один из наиболее интересных и важных разделов гидродинамики.

Я также благодарен своему аспиранту А. А. Килину, который взял на себя серьезную работу не только переводчика, но и проверил многие формулы, так как оригинал изобилует множеством опечаток.

Введение

Теория вихревых движений основывается на теореме Гельмгольца, которая до настоящего времени представляет собой наиболее значительный вклад в гидродинамику.

По всей строгости эта теорема применяется только для движения жидкостей, в которых отсутствует трение и которые имеют постоянную, или зависящую только от давления, температуру. Однако когда эти условия точно не выполнены и отличаются незначительно от указанных, теорема также применима. В этом случае можно рассматривать полученные результаты как точные, но представляющие только первое приближение.

Вихревые движения играют значительную роль в метеорологических явлениях — роль, которую Гельмгольц пытался уточнить.

Делались также попытки найти в существовании подобных вихревых движений механическое объяснение мира. Вместо того чтобы представлять пространство занятым атомами, которые разделяют огромные расстояния по отношению к их собственным размерам, сэр Уильям Томсон допустил, что материя непрерывна. Однако при этом некоторые порции оживлены вихревыми движениями, которые, по теореме Гельмгольца, должны сохранять собственную индивидуальность.

Наконец, уравнения, определяющие вихревые движения, имеют некоторую аналогию по форме с уравнениями электродинамики. Это естественно ведет к сближению двух теорий и в некоторых случаях позволяет из полной разрешимости задач в одной из теорий решить проблемы, имеющиеся в другой. Кроме того, было предпринято несколько попыток, чтобы установить еще более тесную связь между этими теориями.

Напомнив уравнения гидродинамики, я доказываю теорему Гельмгольца и развиваю свои следствия относительно движения жидкостей, сравнивая их с результатами электродинамики.

ГЛАВА 1

Теорема Гельмгольца

1. Уравнения гидродинамики. Пусть x_0, y_0, z_0 — координаты частицы жидкости в начальный момент времени $t = 0$; x, y, z — ее координаты во время t ; u, v, w — составляющие скорости; ρ — плотность жидкости, p — давление.

Выберем в качестве переменных x_0, y_0, z_0, t , являющиеся системой лагранжевых переменных, или x, y, z, t , определяющие систему переменных Эйлера. Примем следующие обозначения, вводя через

$$\frac{du}{dt}, \quad \frac{du}{dx_0}, \quad \frac{du}{dy_0}, \quad \frac{du}{dz_0}$$

производные по отношению к лагранжевым переменным и через

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}$$

производные по отношению к эйлеровским переменным.

В лагранжевой системе x, y, z являются функциями от x_0, y_0, z_0, t .

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w$$

являются составляющими скорости, а

$$\frac{du}{dt}, \quad \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dw}{dt}$$

представляют собой составляющие ускорения.

Для того чтобы записать одну систему переменных через другую, достаточно применить обычные правила дифференцирования, что приводит к формуле

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

или

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (1)$$

Кроме того,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial w} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}. \quad (2)$$

Пусть имеется элемент объема $d\tau$, тогда масса жидкости, которую содержит данный элемент, — $\rho d\tau$. Обозначим через $\rho X d\tau$, $\rho Y d\tau$, $\rho Z d\tau$ проекции на оси равнодействующей всех сил, которые действуют на этот элемент. Уравнения гидродинамики, выражающие состояние равновесия этого элемента, будут иметь вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho X, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \rho Y, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = \rho Z. \quad (3)$$

Для того чтобы получить из этих уравнений уравнения гидродинамики, необходимо к действительным силам добавить фиктивные силы инерции (принцип Даламбера). Составляющие этих сил инерции соответственно равны произведению составляющих ускорения на массу с измененным знаком, то есть

$$-\rho d\tau \frac{du}{dt}, \quad -\rho d\tau \frac{dv}{dt}, \quad -\rho d\tau \frac{dw}{dt}.$$

Следовательно, уравнения гидродинамики можно представить в форме:

1°. В лагранжевой системе

$$\frac{\partial p}{\rho \partial x} = X - \frac{du}{dt}, \quad \frac{\partial p}{\rho \partial y} = Y - \frac{dv}{dt}, \quad \frac{\partial p}{\rho \partial z} = Z - \frac{dw}{dt}. \quad (4)$$

2°. В эйлеровой системе

$$\frac{\partial p}{\rho \partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} \text{ и т. д.} \quad (5)$$

2. В последующем будем полагать, что x , y , z являются непрерывными функциями x_0 , y_0 , z_0 . Это условие, вообще говоря, выполнено не всегда. Действительно, пусть два сосуда, разделенные перегородкой с открытым отверстием, заполнены жидкостью и в одном из них давление больше, чем в другом. Это приведет к тому, что жидкость в трубке получит равномерное движение, а жидкость в сосудах останется неподвижной. Предположим, что трубка имеет форму цилиндра, параллельного оси x .

Вне цилиндра имеем равенство

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0;$$

во внутренней части —

$$x = x_0 + vt, \quad y = y_0, \quad z = z_0.$$

Таким образом, x является разрывной функцией от x_0, y_0, z_0 .

Если x, y, z являются непрерывными функциями от x_0, y_0, z_0 , то частицы жидкости, образующие в начальный момент времени $t = 0$ кривую или непрерывную поверхность, образуют новую кривую или непрерывную поверхность в некоторый момент времени t ; если же кривая в начальный момент времени замкнута, то она остается таковой в любой момент времени t .

Действительно, пусть частицы в начальном положении образуют некоторую кривую. Уравнения этой кривой могут быть выражены следующим образом:

$$x_0 = f_0(\alpha), \quad y_0 = f'_0(\alpha), \quad z_0 = f''_0(\alpha),$$

где f_0, f'_0, f''_0 являются непрерывными функциями параметра α .

Во время t координаты частиц становятся x, y, z , они же в свою очередь, согласно гипотезе, являются непрерывными функциями от x_0, y_0, z_0 . Следовательно, они будут непрерывными функциями и от α :

$$x = f(\alpha), \quad y = f'(\alpha), \quad z = f''(\alpha).$$

Эти уравнения определяют также непрерывную кривую.

Если первоначальная кривая C_0 замкнута, то x_0, y_0, z_0 являются периодическими функциями от α . Так как x, y, z — однозначные функции x_0, y_0, z_0 , они также будут периодическими функциями от α , а кривая C , заполненная частицами в момент времени t , также является замкнутой.

Если частицы в начальный момент времени занимают непрерывную поверхность S_0 , то их координаты выражаются следующим образом

$$x_0 = f_0(\alpha, \beta), \quad y_0 = f'_0(\alpha, \beta), \quad z_0 = f''_0(\alpha, \beta),$$

где f_0, f'_0, f''_0 являются непрерывными функциями от параметров (α, β) . В момент времени t координаты становятся x, y, z и будут непрерывными функциями от x_0, y_0, z_0 и, следовательно, от (α, β) . Таким образом:

$$x = f(\alpha, \beta), \quad y = f'(\alpha, \beta), \quad z = f''(\alpha, \beta),$$

где f, f', f'' — непрерывные функции; и эти уравнения задают непрерывную поверхность S .

3. Уравнение непрерывности. Рассмотрим элемент поверхности $d\omega$ и попытаемся оценить количество жидкости, которое пересекает этот элемент в течение времени dt . Частицы, пересекающие элемент $d\omega$ за время t , переходят в момент времени $t + dt$ в элемент поверхности $d\omega'$, бесконечно близкий $d\omega$. В частности, центр тяжести G элемента $d\omega$ переходит в G' — центр тяжести элемента $d\omega'$. Частицы, которые пересекают $d\omega$ за время $t + dt$, заполняют сам этот элемент. Наконец, те частицы, которые пересекли $d\omega$ в интервале между t и $t + dt$, будут находиться в промежуточных положениях.

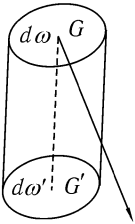


Рис. 1

Подводя итог сказанному, отметим, что все частицы, которые прошли через $d\omega$ за время dt находятся в момент $t + dt$ в объеме, уподобляемом цилиндру, имеющему основание в виде элемента $d\omega$, с образующими параллельными GG' (рис. 1). Заметим также, что $GG' = V dt$, где V является скоростью жидкости в рассматриваемый момент времени. Высота цилиндра является проекцией GG' на нормаль к $d\omega$. Таким образом:

$$V dt \cos(G'GN) = V_n dt,$$

а количество жидкости, пересекающей элемент $d\omega$ за время dt , равно:

$$\rho V_n d\omega dt.$$

Рассмотрим теперь прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны осям координат и соответственно равны dx, dy, dz (рис. 2). Из ранее сказанного следует, что масса жидкости, которая пересекает за время dt сторону $ABCD$, перпендикулярную оси Ox , равна:

$$\rho u dy dz dt;$$

а масса жидкости, которая пересекает противоположную сторону:

$$\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) dy dz dt.$$

Таким образом, масса жидкости, вошедшей в параллелепипед через эти стороны, выражается в виде

$$-\frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Производя подобные вычисления для двух других пар сторон, можно найти, что общая масса жидкости, вошедшей в параллелепипед за время dt , равна:

$$-\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dx dy dz dt.$$

С другой стороны, приращение массы жидкости $\rho dx dy dz$ в объеме параллелепипеда за время dt будет иметь вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt,$$

так как $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt$ представляет приращение плотности ρ за время dt .

Таким образом, необходимо, чтобы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

что представляет собой уравнение непрерывности в системе переменных Эйлера. Это уравнение может быть записано также следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \sum u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0;$$

либо, принимая во внимание отношение (2),

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \sum \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Отметим, что в последней форме содержится два вида производных.

4. Упрощение уравнений Лагранжа. Уравнения Лагранжа поддаются упрощению, если принять некоторые допущения, необходимые для применения принципа Гельмгольца.

Если силы X, Y, Z допускают потенциал V , имеем:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Заметим, кроме того, что какова бы ни была жидкость, плотность ρ , давление p и температура T связаны некоторым отношением:

$$\rho = f(p, T).$$

Для того чтобы доказываемый далее результат был справедливым, необходимо, чтобы ρ была функцией только от p . Это возможно, если рассматривать идеальную жидкость или газ, которые подчиняются закону Мариотта. Согласно этому закону температура постоянна ($\rho = p$), или если речь идет о газе, то можно предположить, что он подвергается адиабатическому преобразованию ($\rho = p^\gamma$). Если температура не является постоянной, то необходимо, чтобы поверхности с равными давлениями совпадали с поверхностями равных температур. Также, если имеются две несмешиваемые жидкости, необходимо, чтобы давление было постоянным на поверхности раздела, для которой можно непосредственно применить теорему.

Если ρ является функцией от p , то $\frac{dp}{\rho}$ — точный дифференциал, а

$$\int \frac{dp}{\rho}$$

представляет собой функцию только от p . Положим

$$V - \int \frac{dp}{\rho} = \psi$$

и продифференцируем обе части по x . Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial p}{\rho \partial x}.$$

В первом уравнении Лагранжа заменим $\frac{\partial p}{\rho \partial x}$ на величину, полученную из этого соотношения. Учитывая, что $\frac{\partial V}{\partial x} = X$, окончательно имеем:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (7)$$

5. Теорема Гельмгольца. Рассмотрим бесконечное количество частиц жидкости, образующих в момент $t = 0$ замкнутую кривую C_0 ; в момент t эти частицы образуют другую замкнутую кривую C (2). Интеграл

$$J = \int (u dx + v dy + w dz), \quad (8)$$

взятый вдоль кривой C , постоянен.

Указанная форма интеграла отличается от формы Гельмгольца, первоначально введенной им в своей теореме, но, как мы увидим далее, эквивалентна последней.

В частности, в этой теореме содержится результат Лагранжа, утверждающий, что если в начальный момент времени существует потенциал скоростей, то он существует и в любой другой момент времени.

Действительно, в этом случае имеем:

$$u dx + v dy + w dz = d\varphi,$$

интеграл J равен нулю в начальный момент времени. Если интеграл постоянен, то он всегда равен нулю, а выражение под знаком интеграла $\int$ — всегда полный дифференциал.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Уравнения замкнутой кривой C_0 имеют вид:

$$x_0 = f_0(\alpha), \quad y_0 = f'_0(\alpha), \quad z_0 = f''_0(\alpha),$$

где f_0, f'_0, f''_0 являются непрерывными и периодическими функциями от α . Для кривой C имеем аналогичное представление:

$$x = f(\alpha), \quad y = f'(\alpha), \quad z = f''(\alpha).$$

Предположим, что величина A является периодом по переменной α :

$$J = \int_0^A \left(u \frac{dx}{d\alpha} + v \frac{dy}{d\alpha} + w \frac{dz}{d\alpha} \right) d\alpha.$$

Необходимо доказать, что

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

Действительно,

$$J = \int_0^A \sum u \frac{dx}{d\alpha} d\alpha,$$

$$\frac{dJ}{dt} = \int_0^A \sum \frac{du}{dt} \frac{dx}{d\alpha} d\alpha + \int_0^A \sum u \frac{d^2x}{d\alpha dt} d\alpha.$$

При этом я считаю, что каждая из сумм $\sum$ является полным дифференциалом.

Таким образом,

$$\sum \frac{du}{dt} \frac{dx}{d\alpha} d\alpha = \sum \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} d\alpha,$$

$$\sum \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{dz}{d\alpha} = \frac{d\psi}{d\alpha},$$

откуда следует, что

$$\sum \frac{du}{dt} \frac{dx}{d\alpha} d\alpha = d\psi.$$

С другой стороны,

$$u \frac{d^2x}{d\alpha dt} d\alpha = u \frac{du}{d\alpha} d\alpha = \frac{1}{2} \frac{du^2}{d\alpha} d\alpha = \frac{1}{2} du^2 \text{ и т. д.}$$

Следовательно,

$$\frac{dJ}{dt} = \int \left[d\psi + \frac{1}{2} d(u^2 + v^2 + w^2) \right].$$

Подынтегральное выражение является полным дифференциалом, интеграл, взятый по замкнутой кривой, равен нулю, а поэтому

$$\frac{dJ}{dt} = 0. \quad (9)$$

■

7. ЗАМЕЧАНИЕ. Эта теорема справедлива при условии, что $d\psi$ — полный дифференциал, иначе говоря, что ρ является функцией от p . При этом внешние силы допускают потенциал, то есть в системе отсутствует трение. Иногда об этом последнем условии говорят, что теорема справедлива при отсутствии мгновенных сил¹. Эта формулировка не совсем точна.

¹Forces instantanées (франц.) — *Прим. ред.*

8. Теорема Стокса. Для дальнейшего преобразования теоремы Гельмгольца применим теорему Стокса, предварительно напомнив ее читателю.

Пусть имеется замкнутая кривая C . Эта кривая лежит на некоторой поверхности и ограничивает на ней некоторую площадь A . Пусть $d\omega$ — элемент этой площади; l, m, n — направляющие косинусы нормали к $d\omega$. Теорема Стокса утверждает, что

$$\begin{aligned} \int_C (u dx + v dy + w dz) = \\ = \int d\omega \left[l \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right) + m \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right) + n \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где первый интеграл берется по всем элементам кривой C ; второй — по всем элементам $d\omega$ площади A .

1°. Предположим сначала, что площадь A — плоская и располагается, например, в плоскости (x, y) . В этом случае:

$$l = m = 0, \quad n = 1, \quad dz = 0, \quad d\omega = dx dy,$$

а поэтому

$$\int_C u dx + v dy = \int dx dy \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right).$$

Это — известная теорема анализа. То же самое будет и в двух других координатных плоскостях.

2°. Площадь A является плоской, но расположенной в некоторой произвольной плоскости.

Пусть три бесконечно малых отрезка OA, OB, OC (рис. 3) параллельны осям. Соединим точки A, B, C ; они образуют бесконечно малый треугольник ABC . Наша теорема справедлива для этого треугольника. Действительно,

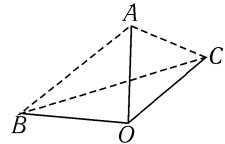


Рис. 3

$$\int_{ABCA} = \int_{ABOA} + \int_{BCOB} + \int_{CAOC}.$$

При этом стороны OA, OB, OC дважды пробегаются в противоположных направлениях, в правой части остаются интегралы, взятые

вдоль AB , BC , CA , как и в левой части. Исходя из того, что треугольники AOB и т. д. бесконечно малые, и прилагая к каждому из этих треугольников, лежащих в координатных плоскостях, равенство (1), получим:

$$\begin{aligned} \int (u dx + v dy + w dz) = \\ = \overline{AOB} \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right) + \overline{AOC} \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right) + \overline{BOC} \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right). \end{aligned}$$

Треугольники AOB , AOC , BOC являются ни чем иным как проекцией треугольника ABC на координатные плоскости. Таким образом, если обозначить

$$ABC = d\omega, \quad AOB = l d\omega, \quad AOC = m d\omega, \quad BOC = n d\omega,$$

то будем иметь:

$$\int u dx + v dy + w dz = \int l d\omega \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right) + \dots$$

Теперь теорема доказана в общей постановке, так как произвольная площадь может быть разложена на достаточно маленькие треугольники, подобные ABC .

В своем известном трактате Максвелл часто пользовался этой теоремой.

9. Замечания Гельмгольца. Определение вихря. Гельмгольц ввел следующие величины

$$\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} = 2\xi, \quad \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} = 2\eta, \quad \frac{dv}{dz} - \frac{du}{dy} = 2\zeta. \quad (11)$$

В этом случае, согласно формуле Стокса, имеем:

$$\int (u dx + v dy + w dz) = 2 \int d\omega (l\xi + m\eta + n\zeta).$$

Согласно установленному нами уравнению (6), этот интеграл, взятый по площади A , постоянен при движении этой площади.

Вектор, имеющий компоненты (ξ, η, ζ) , Гельмгольц назвал *вихрем* (завихренностью)¹. Этот термин требует некоторых пояснений.

Предположим, что кривая C является окружностью (рис. 4). Через точку M на этой кривой проведем вектор MV , который представляет собой скорость с составляющими (u, v, w) . Выражение

$$u dx + v dy + w dz$$

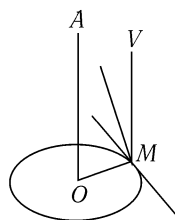


Рис. 4

представляет произведение элемента кривой MM' на проекцию скорости в направлении MM' . Это произведение представляет собой работу, которую дала бы сила, численно равная скорости, когда ее точка приложения переместилась бы из M в M' . Интеграл J равен работе, которую произвела бы эта сила, если бы точка M описывала всю окружность.

Разложим вектор MV на три другие, первый из которых параллелен оси OA , перпендикулярной плоскости круга, второй направлен по касательной к кругу в точке M и, наконец, третий — по радиус-вектору OM . Работа при этом будет произведена только касательной компонентой. Представим эту компоненту в виде φR , где φ является угловой скоростью, R — радиусом круга. Если положить

$$x = R \cos \omega, \quad y = R \sin \omega,$$

то получим

$$J = \int_0^{2\pi} \varphi R^2 d\omega.$$

Пусть φ_0 — средняя угловая скорость движения по окружности, определенная формулой

$$\int_0^{2\pi} \varphi d\omega = 2\pi\varphi_0.$$

Отсюда

$$J = 2\pi\varphi_0 R^2.$$

С другой стороны, известно, что для того, чтобы получить элемент интеграла J , необходимо умножить элемент $d\omega$ площади A на два и на

¹Tourbillion (франц.) — Прим. ред.

проекцию $l\xi + m\eta + n\zeta$ вектора (ξ, η, ζ) на нормаль. Эта проекция является нормальной составляющей вихря. Если окружность достаточно мала, то можно принять ограниченную ей площадь за элемент $d\omega$, из чего получим:

$$J = 2\pi R^2(l\xi + m\eta + n\zeta).$$

Следовательно,

$$\varphi_0 = l\xi + m\eta + n\zeta,$$

где φ_0 является нормальной составляющей вихря.

10. Линии тока. Таким образом, в каждой точке имеется два вектора: скорость, которая имеет составляющие u , v , w , и вихрь с компонентами ξ , η , ζ .

Можно рассмотреть линии, для которых касательные вектора в каждой точке совпадают с вектором скорости. Они задаются дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (12)$$

и определяют *линии тока*. Эти линии не обязательно являются траекториями частиц жидкости. Это верно лишь в случае стационарного течения, при котором скорость в каждой точке постоянна во времени.

11. Вихревые линии. Возможно также рассмотреть линии, которые в каждой точке пространства имеют в качестве касательных вихревые вектора. Их дифференциальные уравнения будут иметь вид

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}. \quad (13)$$

Это — *вихревые линии*. Предположим теперь, что скорость не зависит от z и параллельна плоскости xy , т.е. $w = 0$, а также что производные u и v по z равны нулю. Тогда, по определению вихря (11) (п. 9):

$$\xi = \eta = 0, \quad \zeta = -\frac{du}{dy}.$$

Уравнения вихревых линий имеют вид:

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{\zeta}$$

или

$$dx = dy = 0.$$

В этом случае вихревые линии являются прямыми, параллельными оси Oz .

12. Вихревые поверхности. Вихревой поверхностью называется поверхность, порожденная вихревыми линиями: иначе говоря, это поверхность, касательная плоскость которой в каждой точке проходит через вектор вихря. Условие, выражающее, что поверхность $f(x, y, z) = 0$ является вихревой поверхностью, имеет вид

$$\xi \frac{df}{dx} + \eta \frac{df}{dy} + \zeta \frac{df}{dz} = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим дугу некоторой кривой AB (рис. 5), через различные точки этой кривой проведем вихревые линии. Результатом их совокупности будет вихревая поверхность, которая является односвязной, если кривая AB не замкнута.

Проведем на этой поверхности замкнутую кривую C , ограничивающую некоторую площадь α . Интеграл J , взятый вдоль C , равен нулю. Действительно,

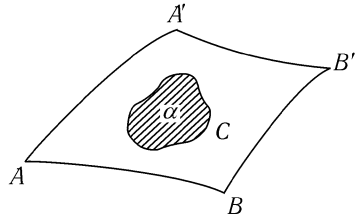


Рис. 5

$$J_C = \int_{\alpha} 2 d\omega (l\xi + m\eta + n\zeta).$$

Но нормальная составляющая вихря $l\xi + m\eta + n\zeta$ равна нулю для всех элементов $d\omega$ площади α , принадлежащей вихревой поверхности. Это и приводит к равенству $J = 0$.

13. Напротив, если поверхность удовлетворяет свойству, что интеграл J , взятый по любой замкнутой кривой, находящейся на этой поверхности, равен нулю, то эта поверхность является вихревой. Действительно,

$$J = \int_{\alpha} 2 d\omega (l\xi + m\eta + n\zeta).$$

Для того чтобы этот интеграл равнялся нулю, какой бы ни была площадь α , необходимо, чтобы для всех элементов поверхности

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0,$$

то есть чтобы нормальная составляющая вихря была равна нулю. Но это и требуется в определении вихревой поверхности.

14. Предположим, что в момент времени $t = 0$ имелось некоторое число частиц, занимающих вихревую поверхность. Оказывается, что в любой момент времени t эти частицы также займут вихревую поверхность.

Действительно, согласно вышесказанному, в начальный момент времени $t = 0$ интеграл J равен нулю для занятой этими частицами поверхности. По теореме Гельмгольца J остается постоянным. Таким образом, этот интеграл будет равен нулю в любой другой момент времени, а занятая частицами в этот момент времени поверхность снова будет вихревой.

Пересечение двух вихревых поверхностей является вихревой линией, и, напротив, любая вихревая линия всегда определяет две вихревые поверхности.

Теперь рассмотрим множество частиц жидкости, занимающих в начальный момент времени $t = 0$ вихревую линию C_0 . В момент времени t эта линия принимает некоторое положение C . Я утверждаю, что C также является вихревой линией.

Действительно, пропустим через C_0 две вихревые поверхности S_0 и S'_0 . В момент времени t эти две поверхности переходят в S и S' , образующие при пересечении кривую C . Согласно уже доказанному, S и S' остаются вихревыми поверхностями, таким образом, пересечение C вновь является вихревой линией.

15. Вихревая трубка. Вихревой трубкой называется поверхность, полученная проведением вихревых линий через различные точки замкнутой кривой (рис. 6). На такой поверхности можно выделить два рода замкнутых кривых.

Кривые C первого рода ограничивают часть площади на поверхности.

Кривые второго рода, такие как $DPEQ$, разделяют поверхность на две области, ни одна из которых не ограничена только кривой $DPEQ$.

На развертке поверхности только кривые первого рода являются замкнутыми.

16. Момент вихревой трубки. Интеграл J , взятый вдоль замкнутой кривой первого рода, равен нулю (п. 12). Но доказательство не применимо непосредственно к кривым второго вида, и, следовательно, формулировка теоремы должна быть изменена следующим образом:

Теорема. *Интеграл J , взятый вдоль замкнутой кривой второго рода, имеет одно и то же значение, какой бы ни была эта кривая.*

Действительно, пусть $DPEQ$ и $D'P'E'Q'$ — два замкнутых контура: необходимо показать, что

$$J_{DPEQ} = J_{D'P'E'Q'}.$$

Возьмем точку P на первой кривой, точку P' — на второй и соединим их между собой PP' (рис. 7). Контур

$$PEQDP - PP' - P'D'Q'E'P' - P'P$$

может быть рассмотрен как замкнутый контур первого рода. Таким образом, вдоль этого контура интеграл J равен нулю, другими словами:

$$J_{PEQDP} + J_{PP'} + J_{P'D'Q'E'P'} + J_{P'P} = 0.$$

Второй и четвертый интегралы взаимно уничтожаются, так как отрезок PP' дважды пробегается в противоположных направлениях. Таким образом, получим

$$J_{PEQDP} + J_{P'D'Q'E'P'} = 0$$

или

$$J_{PEQDP} = J_{P'E'Q'D'P'}.$$

Определенный таким образом интеграл J называется *моментом вихревой трубки*. Этот момент остается постоянным, в то время как частицы, расположенные в трубке, могут перемещаться.

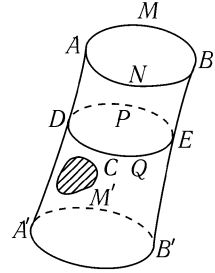


Рис. 6

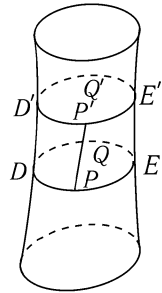


Рис. 7

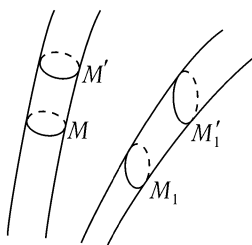


Рис. 8

17. Применение. Бесконечно тонкие вихревые трубки. Рассмотрим бесконечно тонкую вихревую трубку (рис. 8). Проведем прямое сечение этой трубки (являющейся замкнутой кривой второго рода). Таким образом, можно вычислить момент трубки, взяв интеграл J вдоль этого сечения. Его значение, как следует из п. 9, равно

$$J = 2 \int d\omega \xi_n,$$

где ξ_n является нормальной составляющей вихря. В рассматриваемом случае

$$J = 2\xi d\omega,$$

так как вектор вихря ξ перпендикулярен выбранному элементу площади $d\omega$ (прямое сечение, которое всегда можно положить параллельным плоскости yz). Теперь можно заключить, что:

Произведение перпендикулярного сечения бесконечно тонкой вихревой трубки на вихрь постоянно вдоль трубки. Это произведение остается также постоянным в любой момент времени.

Эти два предположения немедленно следуют из того, что J постоянен при тех же условиях, что и п. 6. Они могут быть применены как к жидкостям, так и к газам, когда существует функция, обозначенная ранее через ψ .

18. Теоремы, связанные с единственными жидкостями.

Пусть имеется бесконечно тонкая трубка тока (силовая трубка) и два перпендикулярных сечения, бесконечно близкие между собой в трубке. Объем трубки, заключенной между этими двумя сечениями (рис. 8), может быть рассмотрен как цилиндр, который имеет в качестве основания дифференциал площади $d\omega$, а в качестве высоты MM' , где M и M' являются точками двух сечений, расположенных на одной и той же вихревой линии. Объем этого цилиндра равен

$$MM' d\omega.$$

В следующий момент времени частицы, которые составляли этот объем, образуют другую вихревую трубку. Частицы, которые занимали два перпендикулярных сечения, займут другие сечения, бесконечно

близкие первоначальным, которые не обязательно будут перпендикулярными. При этом уподобляемый цилиндру объем, заключенный между этими сечениями, будет равен

$$M_1 M'_1 d\omega_1,$$

где $M_1 M'_1$ — отрезок образующей, а $d\omega_1$ — перпендикулярное сечение.

Если речь идет о жидкости, то ее объем остается постоянным и

$$MM' d\omega = M_1 M'_1 d\omega_1.$$

Таким образом, очевидно, что $d\omega$ меняется в обратно пропорциональной зависимости от вихря. При этом расстояние MM' между двумя частицами меняется пропорционально вихрю. Можно сказать, что MM' представляет собой по величине, направлению и смыслу величину вихря, умноженную на некоторую постоянную ε .

Пусть x, y, z — координаты точки M , а $x + \varepsilon\xi, y + \varepsilon\eta, z + \varepsilon\zeta$ — координаты точки M' .

За бесконечно малый отрезок времени dt координаты точки M станут равными

$$x + u dt, \quad y + v dt, \quad z + w dt.$$

Координаты точки M' —

$$x + \varepsilon\xi + u_1 dt, \dots \text{ и т. д.}$$

При этом

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial \xi} \varepsilon\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} \varepsilon\eta + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \varepsilon\zeta.$$

Таким образом, координаты точки M' запишутся в виде

$$x + \varepsilon\xi u dt + \varepsilon dt \left(\xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} \right) \text{ и т. д.}$$

С другой стороны, учитывая, что проекции MM' равняются $\varepsilon\xi, \varepsilon\eta, \varepsilon\zeta$, координаты этой точки имеют вид

$$x + u dt + \varepsilon \left(\xi + \frac{d\xi}{dt} dt \right).$$

Приравнивая два эти выражения, получим

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (15)$$

Это соотношение тождественно следующему

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial x} + \zeta \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (16)$$

Действительно, если вычтем одно из другого, то получим:

$$0 = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \zeta \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

или

$$0 = -2\eta\zeta + 2\eta\zeta = 0.$$

Соотношение (15) и два другие, получающиеся перестановкой, выражают теорему Гельмгольца, но исключительно для случая жидкостей.

19. Другие доказательства теоремы Гельмгольца. Доказательство Гельмгольца. Гельмгольц вывел свою теорему, применяя соотношение (15), полученное выше, и используя уравнения Эйлера.

В п. 4 записаны уравнения Лагранжа:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ и т. д.,}$$

которое содержит как лагранжевы, так и эйлеровы переменные. Для того чтобы оставить только последние, выполним преобразование:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \text{ и т. д.,}$$

в результате которого получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} & (1) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} & (2) \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial z} - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} & (3) \end{cases} \quad (17)$$

Продифференцируем уравнение (3) по y , уравнение (2) по z и вычтем одно из другого. Вспомнив предварительно определение ξ, η, ζ (п. 9), получим

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial \xi}{\partial t} = & -2u\frac{\partial \xi}{\partial x} - 2v\frac{\partial \xi}{\partial y} - 2w\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} - \\ & - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (18)$$

С другой стороны,

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y} + w\frac{\partial \xi}{\partial z},$$

и имеем уравнение непрерывности для жидкостей, которое можно записать в компактной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Учитывая эти соотношения, уравнению (4) можно придать форму

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial x} + \zeta\frac{\partial w}{\partial x}.$$

В этой форме несложно обнаружить уравнение (16). Наконец, необходимо отметить, что это доказательство теоремы Гельмгольца также применимо только к жидкостям. ■

20. Доказательство Кирхгофа. Кирхгоф берет за основу уравнения Лагранжа

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

преобразованные таким образом, что исключена зависимость от лагранжевых переменных.

Воспользуемся соотношением

$$\frac{d\psi}{dx_0} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dx_0} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dx_0} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{dz}{dx_0}.$$

Умножим первое уравнение Лагранжа на $\frac{dx}{dx_0}$, второе — на $\frac{dy}{dx_0}$, третье — на $\frac{dz}{dx_0}$, что после суммирования приводит к соотношению

$$\frac{du}{dt} \frac{dx}{dx_0} + \frac{dv}{dt} \frac{dy}{dx_0} + \frac{dw}{dt} \frac{dz}{dx_0} = \frac{d\psi}{dx_0}$$

и к двум другим аналогичным, полученным симметричным образом. ■

21. Впрочем, можно придать этим уравнениям более общую форму, заменяя x_0, y_0, z_0 тремя другими переменными a, b, c , определенными некоторыми соотношениями

$$x_0 = \varphi_0(a, b, c), \quad y_0 = \varphi_1(a, b, c), \quad z_0 = \varphi_2(a, b, c),$$

где a, b, c не зависят от t . Производные по t будут одинаковыми в двух системах переменных.

Действуя таким же образом, как и ранее, получим

$$\frac{du}{dt} \frac{dx}{da} + \frac{dv}{dt} \frac{dy}{da} + \frac{dw}{dt} \frac{dz}{da} = \frac{d\psi}{da},$$

а также два аналогичные уравнения, в которых a заменено на b , а затем на c .

В результате будем иметь систему:

$$\begin{cases} \sum \frac{du}{dt} \frac{dx}{da} = \frac{d\psi}{da}, & (1) \\ \sum \frac{du}{dt} \frac{dx}{db} = \frac{d\psi}{db}, & (2) \\ \sum \frac{du}{dt} \frac{dx}{dc} = \frac{d\psi}{dc}. & (3) \end{cases} \quad (19)$$

Продифференцируем (1) по b , уравнение (2) по a и вычтем одно из другого

$$\sum \left(\frac{d^2 u}{dt db da} \frac{dx}{da} - \frac{d^2 u}{dt da db} \frac{dx}{db} \right) = 0.$$

Это соотношение тождественно следующему

$$\frac{d}{dt} \sum \left(\frac{du}{db da} \frac{dx}{da} - \frac{du}{da db} \frac{dx}{db} \right) = 0,$$

эквивалентному также равенству

$$\frac{du}{db} \frac{dx}{da} - \frac{du}{da} \frac{dx}{db} + \frac{dv}{db} \frac{dy}{da} - \frac{dv}{da} \frac{dy}{db} + \frac{dw}{db} \frac{dz}{da} - \frac{dw}{da} \frac{dz}{db} = \text{const.} \quad (20)$$

Можно получить два других аналогичных уравнения, меняя местами один за другим a , b , c и изменяя значение произвольной постоянной.

21'. Эти уравнения Кирхгофа эквивалентны уравнению, которое мы привели ранее, т. е.:

$$J = \int u \, dx + v \, dy + w \, dz = \text{const.}$$

Действительно, рассмотрим точку M , координаты которой (x, y, z) в системе Эйлера или (a, b, c) в системе Кирхгофа: x, y, z изменяются во времени, в то время как a, b, c не зависят от t , а лишь от x_0, y_0, z_0 . Точка M принадлежит некоторой кривой C . Выберем a, b, c так, чтобы для всех точек этой кривой $c = 0$. Если это условие выполняется в момент времени $t = 0$, оно будет справедливо в любой момент времени.

Примем для некоторого момента времени a, b как декартовы координаты точки на плоскости. При этом каждой точке M из C будет соответствовать точка M' плоскости и, когда M описывает кривую C , M' описывает некоторую кривую C' , которая будет замкнутой в том и только в том случае, если C замкнута. Кривая C' неподвижна, в то время как кривая C изменяется при движении жидкости. Вычислим значение интеграла

$$\int_C u \, dx$$

вдоль кривой C :

$$\int_C u \, dx = \int_{C'} \left(u \frac{dx}{da} da + u \frac{dx}{db} db \right),$$

причем второй интеграл берется вдоль кривой C' . Преобразуем этот интеграл с помощью формулы Стокса (п. 8)

$$\int_{C'} \left(u \frac{dx}{da} da + u \frac{dx}{db} db \right) = \iint \left[\frac{d}{da} \left(u \frac{dx}{db} \right) - \frac{d}{db} \left(u \frac{dx}{da} \right) \right],$$

где двойной интеграл берется по всей площади A' , ограниченной кривой C' .

После дифференцирований в подынтегральном выражении получим

$$\int_C u \, dx = \iint \left(\frac{du}{da} \frac{dx}{db} - \frac{du}{db} \frac{dx}{da} \right) da \, db.$$

Воспользуемся тем же преобразованием для $\int_C v \, dy$ и $\int_C w \, dz$ и, сложив полученные выражения, будем иметь

$$J = \int_C u \, dx + v \, dy + w \, dz = \int_{A'} \sum \left(\frac{du}{da} \frac{dx}{db} - \frac{du}{db} \frac{dx}{da} \right) da \, db. \quad (21)$$

Площадь A' не меняется, так как кривая C' фиксирована. Сумма $\sum$, помещенная под знак интеграла, постоянна по рассуждениям Кирхгофа, т. е. $J = \text{const}$.

ГЛАВА 2

Следствия из теоремы Гельмгольца

22. Случай установившихся движений. Движение является установившимся, если все функции, обозначенные нами как u, v, w, ψ , не зависят от t , а лишь от переменных Эйлера x, y, z . Следовательно, в случае установившихся движений имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \text{ и т. д.,}$$

и, учитывая п. 1,

$$\frac{du}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{d\psi}{dt} = u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Впрочем, эти соотношения могут быть применены к некоторой произвольной функции ψ .

Учитывая это замечание, из основной теоремы Гельмгольца можно вывести несколько следствий.

23. Теорема. *Если движение установившееся, то существует бесконечное множество поверхностей, на которых можно провести бесконечное число линий тока, а также бесконечное число вихревых линий.*

Это означает следующее:

Через точку A (рис. 9) можно провести линию тока AC и вихревую линию AT . Если через различные точки на AC провести вихревые линии, то они образуют некоторую поверхность. Если также провести через различные точки на AT линии тока, то они образуют другую поверхность. Из теоремы следует, что эти две поверхности тождественны.

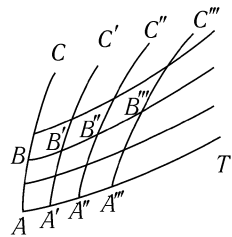


Рис. 9

Иначе говоря, если провести через точки A, A', A'', A''' на кривой AT линии тока $AC, A'C', A''C'', A'''C'''$, то вихревые линии, проведенные через некоторую точку B на AC , пересекутся с $AC, A'C', \dots$ и т. д.

Это утверждение почти очевидно. Действительно, когда движение является установившимся, линии тока представляют собой траектории частиц жидкости. Таким образом, рассмотрим частицы, которые в начальный момент времени $t = 0$ находятся в A, A', A'', A''' ; в момент времени t эти частицы находятся в B, B', B'', B''' . Так как в силу теоремы Гельмгольца вихри остаются неизменными (т. е. состоят из одних и тех же частиц жидкости), то частицы B, B', B'', B''' будут находиться на одной и той же вихревой линии.

24. Общее уравнение рассматриваемых поверхностей. В п.4 нами получена формула

$$\psi = V - \int \frac{dp}{\rho}.$$

Пусть также

$$T = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2).$$

Я утверждаю, что уравнение поверхности, которая была нами введена, можно записать в виде

$$\psi - T = \text{const.}$$

Для доказательства достаточно показать, что $\psi - T$ постоянно с одной стороны на линиях тока, с другой стороны — на вихревых линиях.

1° *Случай линий тока.* Эти линии являются траекториями частиц жидкости. Следя за движущейся частицей и применяя обозначения Гельмгольца, в которых изменяется только t , получим

$$d\psi = \frac{d\psi}{dt} dt, \quad dT = \frac{dT}{dt} dt,$$

$$dT = u du + v dv + w dw = \left(u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} + w \frac{dw}{dt} \right) dt,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} = u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} + w \frac{dw}{dt},$$

так как, по уравнениям Лагранжа из п. 4,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ и т. д.}$$

Таким образом,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{dT}{dt} \quad \text{или} \quad d\psi - dT = 0,$$

$$\psi - T = \text{const.} \quad (1)$$

2° *Результат для вихревых линий.* Уравнения этих линий можно записать в виде

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = d\alpha,$$

или

$$dx = \xi d\alpha, \quad dy = \eta d\alpha, \quad dz = \zeta d\alpha.$$

Я утверждаю, что

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{dT}{d\alpha}.$$

Действительно,

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \xi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \eta + \frac{\partial \psi}{\partial z} \zeta,$$

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{du}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \text{ и т. д.,}$$

и после подстановки одного в другое получим

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = u \left(\xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial x} + \zeta \frac{\partial w}{\partial x} \right) + v \left(\xi \frac{\partial u}{\partial y} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial y} \right) + w \left(\xi \frac{\partial u}{\partial z} + \eta \frac{\partial v}{\partial z} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\alpha} &= u \frac{du}{d\alpha} + v \frac{dv}{d\alpha} + w \frac{dw}{d\alpha} = \\ &= u \left(\xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} \right) + v \left(\xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z} \right) + w \left(\xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Но в п. 18 мы выяснили, что

$$\xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial x} + \zeta \frac{\partial w}{\partial x} \text{ и т. д.}$$

Следовательно,

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{dT}{d\alpha} \quad \text{и} \quad \psi - T = \text{const.}$$

25. Теорема Бернулли. *В случае, если вихрь в любой точке пространства равен нулю,*

$$\xi = \eta = \zeta = 0,$$

то есть когда существует функция скоростей, любая линия может рассматриваться как вихревая, а $\psi - T$ постоянно во всем пространстве.

26. Определение скоростей в функции вихрей. Определим составляющие скорости u, v, w из заданных компонент вихря ξ, η, ζ .

Если мы можем найти решение этой задачи (исходя из того, что вихри остаются неизменными), то после интегрирования по времени мы узнаем скорость, с которой эти вихри перемещаются и, следовательно, их направление и величину, бесконечно мало отличающуюся в момент времени $t + dt$ от первоначальной величины.

Сначала заметим, что эта задача вообще является неопределенной, за исключением двух случаев: когда речь идет об однородной жидкости, занимающей бесконечное пространство или об однородной жидкости, полностью заполняющей сосуд, в котором она содержится.

27. Объемы односвязных и многосвязных областей. Прежде чем рассматривать предложенный вопрос, необходимо более точно определить, что мы называем односвязным и многосвязным объемом, поскольку к этим понятиям мы будем постоянно обращаться.

Односвязным объемом является объем, в котором нет отверстий: такими объемами могут быть сфера, эллипсоид или куб.

Любая замкнутая кривая, проведенная во внутренней части такого объема, может быть превращена в точку, деформируясь непрерывным образом и не покидая объем (рис. 10). При этом она замечает некоторую площадь A , которая исключительно ограничивается первоначальной кривой.

Таким образом, условие, что объем является односвязным, выполняется, если любая замкнутая кривая внутри этого объема может быть рассмотрена в качестве контура плоской площади, расположенной целиком внутри объема. Если принять это определение, то объем, заключенный между двумя концентрическими сферами, является односвязным.

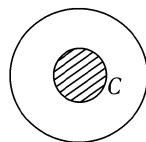


Рис. 10

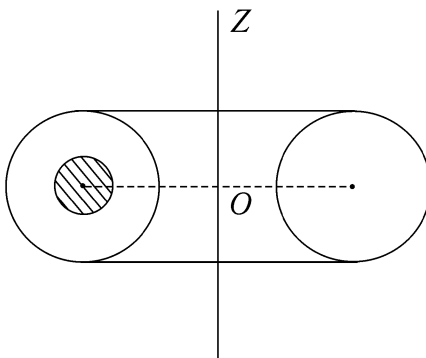


Рис. 11

28. Многосвязный объем имеет тело, в котором имеется одно или несколько отверстий: количество отверстий обозначает порядок кратности. Таким объемом может быть тор (рис. 11).

В многосвязных объемах можно провести замкнутые кривые двух родов. Кривые первого рода, подобные тем, что были определены в предыдущем параграфе, могут быть деформированы в точку, не покидая объема. В торе они будут окружностями, проведенными в меридианной плоскости, концентрическими с одной из меридианных окружностей.

Кривые второго рода, которые не могут быть превращены непрерывной деформацией в точку, не покидая объем: например, на торе — это окружности, проведенные в плоскостях, перпендикулярных оси и имеющие свои центры на этой оси.

29. Предположим теперь, что вихрь всюду равен нулю

$$\xi = \eta = \zeta = 0,$$

и рассмотрим интеграл

$$J = \int (u \, dx + v \, dy + w \, dz).$$

Этот интеграл, взятый вдоль замкнутой кривой первого рода равен нулю. Действительно, согласно п. 9, имеем

$$J = \int 2\xi_n \, d\omega,$$

где ξ_n является нормальной компонентой вихря, а $d\omega$ — элементом площади, ограниченной кривой. Согласно предположению,

$$\xi_n = 0, \quad \text{имеем} \quad J = 0.$$

Это предположение справедливо и для кривых второго рода. Действительно, предположим, что объем является тором и что

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad w = 0.$$

Линии тока являются окружностями, имеющими центры на оси и проведенные в плоскостях, перпендикулярных этой оси. При этом

$$u \, dx + v \, dy = \frac{y \, dx - x \, dy}{x^2 + y^2} = d \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Функция скоростей $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ не является однозначной, но имеет бесконечное множество значений, различающихся на π . Когда будем брать интеграл J вдоль кривой второго рода, этот интеграл не будет равен нулю, а равен π или кратен ему, потому что, возвращаясь в начальную точку, мы приходим к другому значению этой функции.

30. Разрезы. Когда объем является многосвязным, его возможно представить в односвязном виде, для чего необходимо проделать некоторое количество разрезов. В частности, если объем является двусвязным, достаточно проделать всего один разрез. Например, тор может быть представлен в односвязном виде, если разрезать его вдоль одной из меридианных окружностей.

Кривые, которые не пересекают разрез, будут представлять собой кривые первого рода; кривые, пересекающие разрез, — второго рода.

Функция скоростей остается однозначной пока не пересекает разрез, а интеграл J , взятый вдоль кривой, не пересекающей разрез, равен нулю.

С другой стороны, рассмотрим две бесконечно близкие друг другу и разрезу точки, но расположенные по разные стороны от этого разреза. Функция скорости испытывает разрыв между двумя точками; разность величин, которые она принимает в двух этих точках будет конечной и равной интегралу J , взятому вдоль кривой второго рода, соединяющей эти две точки.

31. Теорема. *Эта разность постоянна, другими словами, значение интеграла J одинаково для всех кривых интегрирования, которые пересекают разрез только один раз.*

Действительно, предположим, что кривая C деформируется непрерывным образом, не покидая объем и, например, отклонясь в сторону как C' (рис. 12). Во время этой деформации кривая C замещает некоторую площадь, которая полностью расположена внутри объема.

Интеграл J , взятый вдоль полного контура этой площади CC' , равен нулю.

Однако две кривые C и C' пробегаются при интегрировании в противоположных направлениях так, что

$$J_C - J_{C'} = 0$$

или

$$J_C = J_{C'}.$$

Значение разрыва функции скоростей φ на границе разреза постоянно во всех точках и равно A .

Если кривая второго рода после интегрирования дважды пересекает разрез, то разрыв функции φ будет $2A$ и так далее. Вообще, если контур интегрирования пересекает разрез n раз в направлении по часовой стрелке и n' раз в направлении против часовой стрелки, значение интеграла будет равно $(n - n')A$.

32. Если объем трехсвязный (рис. 13), то, чтобы представить его в односвязном виде, необходимо проделать два разреза. Тогда функция скоростей φ является вполне определенной, но она имеет разрыв на границе каждого из разрезов. Разрыв имеет одну постоянную величину A

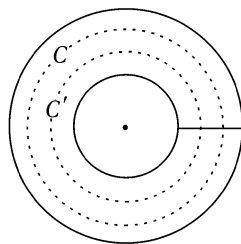


Рис. 12

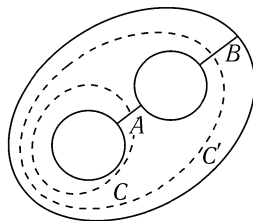


Рис. 13

вдоль первого разреза и постоянную величину B вдоль второго, обычно отличную от A .

Если контур интегрирования C пересекает только первый разрез один раз, то

$$J_C = A.$$

Если контур C' пересекает второй разрез также только один раз, при этом не пересекая первый, то

$$J_{C'} = B.$$

Наконец, в общем случае, если контур интегрирования пересекает первый разрез n раз в направлении по часовой стрелке и n' раз против часовой стрелки, а второй разрез — p раз в направлении по часовой стрелке и p' раз против, то имеем

$$J = (n - n')A + (p - p')B.$$

ГЛАВА 3

Определение компонент скорости как функций компонент вихря. Частный случай жидкости

33. В п. 3 мы установили уравнение непрерывности для общего случая

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Если речь идет о жидкости, то плотность ρ постоянна и это уравнение сокращается до

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Предположим, что вихрь повсюду равен нулю, иначе говоря, выражение

$$u \, dx + v \, dy + w \, dz$$

является полным дифференциалом $d\varphi$, где φ — функция скоростей.

Тогда уравнение непрерывности запишется:

$$\Delta\varphi = 0,$$

полагая, как всегда,

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

34. Теорема. *Существуют два случая, где условия непрерывности могут выполняться, только если жидкость покоится:*

1° *Когда жидкость заполняет бесконечное пространство и покоится в бесконечности;*

2° *Когда жидкость полностью заполняет замкнутый односвязный сосуд.*

Докажем эти два утверждения, основываясь на теореме Грина, которая выражается уравнением

$$\int \varphi \frac{d\varphi}{dn} d\omega = \int \varphi \Delta \varphi d\tau + \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau. \quad (3)$$

Интеграл в левой части равенства берется по всем элементам $d\omega$ замкнутой поверхности; два других — по всем элементам $d\tau$ объема, ограниченного этой поверхностью. Производная $\frac{d\varphi}{dn}$ вдоль нормали к поверхности вычислена в центре масс элемента $d\omega$ и равна проекции скорости на эту нормаль. Функция φ должна быть однозначна внутри объема τ .

35. Жидкость, занимающая бесконечное пространство. Применим теорему Грина к сфере очень большого радиуса.

Согласно нашему предположению, жидкость покоится в бесконечности и $\frac{d\varphi}{dn}$ будет равна нулю на всей поверхности этой сферы. Интеграл в левой части равенства будет равен нулю. Первый интеграл в правой части также равен нулю, так как $\Delta \varphi = 0$; следовательно последний тоже равен нулю

$$\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = 0.$$

Подынтегральное выражение является существенно положительным, так как это сумма квадратов. Таким образом, это равенство влечет за собой следующее

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

или

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Следовательно, скорость равна нулю и жидкость покоится.

36. Жидкость, полностью заполняющая неподвижный сосуд. 1° *Односвязный сосуд.* Применим еще раз теорему Грина, принимая за поверхность интегрирования поверхность стенок сосуда, а за объем — объем сосуда. Так как стенки сосуда неподвижны, то скорость

жидкости вблизи стенок может быть только касательной, т. е. нормальная составляющая $\frac{d\varphi}{dn}$ равна нулю. Таким образом:

$$\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega = 0,$$

так как $\Delta \varphi = 0$, то

$$\int \varphi \Delta \varphi d\tau = 0,$$

и, следовательно,

$$\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = 0.$$

Из чего снова получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Таким образом, скорость равна нулю в любой точке сосуда.

37. Предыдущее доказательство имеет смысл только для односвязного объема. Если сосуд многосвязный, то функция φ более не будет однозначной, и теорема Грина не применима.

38. 2° *Двусвязный сосуд*. Предположим, что сосуд двусвязный и имеет форму тора. Прорежем разрез по меридианной окружности: этот разрез пересекается замкнутыми кривыми второго рода. Функция скоростей φ является однозначной до тех пор, пока не пересечет разрез, а при его пересечении терпит разрыв, постоянный по всей поверхности разреза.

Если задана постоянная величина разрыва J вдоль кривой второго рода, то движение жидкости полностью определено.

Действительно, предположим, что существует два возможных решения, и пусть φ' и φ'' — функции скоростей, соответствующие этим решениям. Пусть φ'_1 и φ'_2 — значения φ' по обе стороны разреза, а φ''_1 и φ''_2 — значения φ'' . Получим

$$\varphi'_1 - \varphi'_2 = J_0, \quad \varphi''_1 - \varphi''_2 = J_0,$$

где J_0 — заданная постоянная; кроме того, пока разрез не пересекается, φ' и φ'' являются однозначными. Вычитаем приведенные выше уравнения одно из другого и получаем

$$\varphi'_1 - \varphi''_1 = \varphi'_2 - \varphi''_2.$$

Таким образом, функция $\varphi' - \varphi''$ имеет одно и то же значение по обеим сторонам разреза. Она является однозначной и непрерывной по всему объему и к ней можно применить теорему Грина. Следовательно, выведем

$$\frac{\partial(\varphi' - \varphi'')}{\partial x} = 0 \text{ и т. д.}$$

или

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = \frac{\partial \varphi''}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = \frac{\partial \varphi''}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = \frac{\partial \varphi''}{\partial z}.$$

Составляющие скорости одинаковы в обоих случаях: таким образом, имеется единственно возможное движение.

39. 3° Трехсвязный сосуд. В этом случае необходимо сделать два разреза для того, чтобы представить объем в односвязном виде.

Движение определено, когда заданы

$$\varphi_1 - \varphi_2 = J_0, \quad \varphi_3 - \varphi_4 = J_1,$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ — разность значений φ с двух сторон первого, а $\varphi_3 - \varphi_4$ — второго разрезов.

Допуская существование двух решений φ' и φ'' подобно предыдущему случаю, получим

$$\varphi'_1 - \varphi'_2 = \varphi''_1 - \varphi''_2, \quad \varphi'_3 - \varphi'_4 = \varphi''_3 - \varphi''_4.$$

Функция $\varphi' - \varphi''$ является однозначной и непрерывной внутри объема, и из теоремы Грина следует

$$\varphi' - \varphi'' = \text{const}$$

или

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = \frac{\partial \varphi''}{\partial x} \text{ и т. д.}$$

40. Вихрь, не равный нулю. В случае, когда вихрь не равен нулю, задача Гельмгольца определена и имеет одно и только одно решение.

Действительно, в чем же заключается эта задача? Речь идет о том, чтобы при заданных компонентах вихря ξ, η, ζ определить значения u, v, w из уравнений

$$\begin{cases} 2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Предположим, что нашлось бы два решения

$$\begin{aligned} u &= u', & u &= u'', \\ v &= v', & v &= v'', \\ w &= w', & w &= w''. \end{aligned}$$

Тогда получим следующие соотношения

$$2\xi = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}, \quad 2\xi = \frac{\partial w''}{\partial y} - \frac{\partial v''}{\partial z},$$

откуда

$$0 = \frac{\partial(w' - w'')}{\partial y} - \frac{\partial(v' - v'')}{\partial z},$$

а также по аналогии и два других уравнения. Эти три уравнения выражают тот факт, что сумма

$$(u' - u'')dx + (v' - v'')dy + (w' - w'')dz$$

является полным дифференциалом $d\varphi$. Таким образом, можно установить

$$u' - u'' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ и т. д.}$$

Запишем уравнение неразрывности для $u = u' \dots$, а также для $u = u'' \dots$, откуда следует

$$\sum \frac{\partial u'}{\partial x} = 0, \quad \sum \frac{\partial u''}{\partial x} = 0.$$

Вычитая одну сумму из другой, получим

$$\sum \frac{\partial(u' - u'')}{\partial x} = 0,$$

то есть

$$\Delta\varphi = 0.$$

Если сосуд заполнен полностью, то нормальная составляющая скорости должна равняться нулю в каждой точке стенки сосуда. Пусть l, m, p — направляющие косинусы нормали к стенке сосуда, тогда нормальная составляющая скорости будет иметь вид

$$lu + mv + pw.$$

Если эта составляющая равна нулю, то

$$lu' + mv' + pw' = 0, \quad lu'' + mv'' + pw'' = 0.$$

Следовательно,

$$l \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m \frac{\partial \varphi}{\partial y} + p \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

Если сосуд односвязный, то, рассуждая как и раньше в п. **36**, найдем

$$\varphi = \text{const}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

или

$$u' = u'', \quad v' = v'', \quad w' = w''.$$

Таким образом, задача допускает только единственное решение.

41. Пусть сосуд является многосвязным, тогда предыдущее доказательство недействительно. Необходимо ввести еще одно или несколько дополнительных условий.

Пусть, например, объем является двусвязным. Прорежем один разрез. Пусть J_0 — значение интеграла, взятого по замкнутой кривой, пересекающей разрез только один раз.

Задача будет определена, если помимо ξ, η, ζ задать величину J_0 .

Действительно, предположим, что могло бы существовать два решения (u', v', w') и (u'', v'', w'') . Как и выше в п. 38, можно доказать, что справедливы следующие соотношения

$$u' - u'' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v' - v'' = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w' - w'' = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad \Delta \varphi = 0.$$

С другой стороны

$$\int u' dx + v' dy + w' dz = J_0, \quad \int u'' dx + v'' dy + w'' dz = J_0.$$

Вычитая почленно один интеграл из другого, получим

$$\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = 0$$

или

$$\int d\varphi = 0.$$

Таким образом, функция φ остается однозначной, даже если избавиться от разреза. Она должна быть постоянной и, следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u' - u'' = 0 \quad \text{или} \quad u' = u'' \quad \text{и т. д.}$$

42. Если объем является трехсвязным, необходимо проделать два разреза. Для того чтобы определить задачу, помимо ξ, η, ζ необходимо задать J_0 — величину интеграла J , взятого вдоль замкнутой кривой, пересекающей один раз только первый разрез, а также интеграл J_1 вдоль замкнутой кривой, пересекающей один раз только второй разрез.

43. Аналогия между уравнениями гидродинамики Гельмгольца и уравнениями электродинамики Максвелла. 1° Предположим, что рассматриваемая нами жидкость заполняет бесконечное пространство и покоится.

В этом случае система уравнений Гельмгольца имеет ту же форму, что и система уравнений Максвелла для магнитного поля.

Максвелл назвал u, v, w компонентами тока. Это значит, что через элемент поверхности dw , перпендикулярный оси Ox , за время dt проходит количество электричества $u dw dt$ и т. д. Величины α, β, γ являются компонентами напряженности магнитного поля, вызванного током;

a, b, c — составляющие вектора магнитной индукции, которые переходят в α, β, γ в отсутствии постоянного магнита и мягких магнетиков. Уравнение Максвелла

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

при этом переходит в следующее

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$$

Сравнивая две системы, получим

Максвелл	Гельмгольц
$4\pi u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},$	$2\xi = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz},$
$4\pi v = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x},$	$2\eta = \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx},$
$4\pi w = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y},$	$2\zeta = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy},$
$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$	$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$

Видно, что для того, чтобы уравнения Гельмгольца перешли в уравнения Максвелла, достаточно заменить $\xi, \eta, \zeta, u, v, w$ на $2\pi u, 2\pi v, 2\pi w, \alpha, \beta, \gamma$. Кроме того, мы доказали, что если подобная система допускает решение, то это решение единственно.

Предположим, что нам известны величина и направление вихревого вектора. Разделим этот вектор на 2π и будем считать, что полученный таким образом вектор представляет собой электрический ток. Полученная таким образом система токов создает магнитное поле, вектор которого, кроме того, задает скорость частиц жидкости в той же точке. Таким образом, силовые линии магнитного поля аналогичны линиям тока гидродинамических течений.

44. Случай существования единственной вихревой трубки. Предположим, что существует единственная замкнутая вихревая трубка бесконечно малого сечения, в каждой точке которой вихрь имеет достаточно большое значение для того, чтобы момент трубки был конечен, и, наконец, что вихрь всюду, за исключением трубки, равен

нулю. Ввиду последнего предположения, вне трубки существует функция скоростей φ . Однако объем вне трубки является двусвязным, так как можно провести замкнутые кривые двух родов:

1° не пересекающие трубку, такие как C (рис. 14);

2° пересекающиеся с трубкой подобно кольцам цепи, как, например, C' .

Интеграл J , взятый вдоль кривых первого рода, равен нулю, а взятый вдоль кривых второго рода равен не нулю, а моменту трубки.

Сечение трубки бесконечно малó, поэтому трубка может быть рассмотрена как замкнутая кривая, которую назовем осью трубки. Через ось вихревой трубки мы можем провести некоторую поверхность и принять за

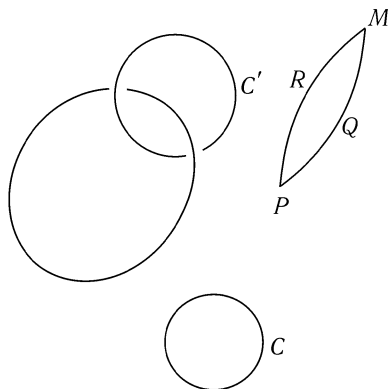


Рис. 14

разрез ее часть, ограниченную осью вихря. Все замкнутые кривые, не пересекающие такой разрез, будут кривыми первого рода, а пересекающие — кривыми второго рода п. 30.

45. Пусть функция φ равна нулю в бесконечности, что возможно, так как эта функция задана только ее производными и, следовательно, определена с точностью до постоянной. Для того чтобы определить значение φ в заданной точке P , возьмем интеграл J вдоль кривой, соединяющей бесконечно удаленную точку с рассматриваемой точкой P , не пересекая при этом разрез. Этого определения достаточно только в том случае, если функция φ однозначна, и, следовательно, значение, вычисляемое таким образом, не зависит от непрерывного пути, направленного из бесконечности в точку P . Это условие выполняется. Действительно, рассмотрим два пути MQP , MRP , соединяющие очень удаленную точку M с точкой P . Вдоль замкнутого контура $MQPRM$, который не пересекает разрез, интеграл J равен нулю. Отсюда

$$\int_{MQP} d\varphi + \int_{PRM} d\varphi = 0$$

или

$$\int_{MQP} d\varphi = \int_{MRP} d\varphi = \varphi_P.$$

Вычисленное таким образом значение φ в точке M зависит от поверхности, выбранной в качестве разреза. Оно является одинаковым, если два разреза не заключают между собой точку M , и изменяется, если точка M находится между двумя поверхностями, последовательно выбранными в качестве разрезов.

Определим теперь значение функции φ . Пусть μ — момент вихревой трубки

$$\mu = 2\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} d\omega,$$

где $d\omega$ — перпендикулярное сечение трубки, которое полагается бесконечно малым. Если заменить вихри (ξ, η, ζ) на токи (u, v, w) , то каждая составляющая тока будет равняться соответствующему компоненту вихря, разделенного на 2π . Сила тока, касательного к вихревой трубке, будет равна

$$i = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} d\omega.$$

Следовательно,

$$\mu = 4\pi i.$$

Если определить значение i с помощью этого равенства, то сила магнитного поля¹ и скорость частицы жидкости в точке будут представлены одним и тем же вектором. Функция скоростей будет представлять собой магнитный потенциал тока. В заданной точке, как известно, этот потенциал выражается через

$$i\sigma,$$

где σ — телесный угол, под которым виден контура тока из этой точки. Следовательно,

$$\varphi = i\sigma = \frac{\mu\sigma}{4\pi},$$

где σ — телесный угол, под которым видна ось вихревой трубки из рассматриваемой точки.

Если бы имелось несколько вихревых трубок, то функция φ всей системы представляла бы собой сумму функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ каждой из трубок, для которых верно то же соотношение.

¹В настоящее время принято название «напряженность магнитного поля». — Прим. ред.

46. Случай прямолинейной и бесконечной вихревой трубки. Пусть вихревая трубка прямолинейна.

Применим использованную выше аналогию. Необходимо заменить трубку на бесконечный прямолинейный проводник с током силой

$$i = \frac{\mu}{4\pi}.$$

Согласно закону Био–Савара, действие этого тока на магнитный полюс M перпендикулярно плоскости MPQ и обратно пропорционально расстоянию r от точки M до прямой PQ . Таким образом, скорость частицы жидкости M будет перпендикулярна плоскости MPQ и обратно пропорциональна ее расстоянию от оси вихревой трубки.

47. Впрочем, этот результат может быть получен непосредственно, без помощи сравнения с электродинамикой.

В силу симметричности, скорость должна находиться в плоскости R , проведенной через точку M перпендикулярно прямой PQ . С другой стороны, если рассмотрим плоскость PMQ , то эта плоскость, собственно говоря, не является плоскостью симметрии. Действительно, примем за плоскость рисунка плоскость R (рис. 15). Прямая PQ проектируется на эту плоскость в точку N , а MN является следом плоскости PMQ . Пусть вихрь имеет направление, определенное стрелкой, а скорость жидкости направлена вдоль MV .

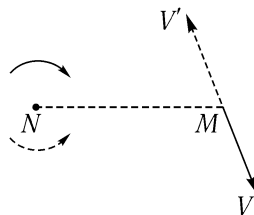


Рис. 15

Рассмотрим отражение рисунка относительно MN . Момент вихревой трубки сохранит то же значение, но при этом вихрь сменит направление. Таким образом, скорость сохранит свою абсолютную величину и расположение, но изменит направление и станет MV' . Поскольку MV' должен быть симметричен MV относительно MN , необходимо, чтобы MV был перпендикулярен следу плоскости MN . Следовательно, он перпендикулярен и плоскости MPQ , так как известно, что MV находится в плоскости R .

48. Для того чтобы найти величину скорости, напомним сначала, что

$$J = \int (u \, dx + v \, dy + w \, dz) = \mu.$$

Выберем в качестве контура интегрирования окружность, описанную в плоскости, перпендикулярной прямой PQ , с радиусом MN и центром в точке N . Примем PQ за ось z , точку N — за начало координат и два диаметра окружности, перпендикулярные друг относительно друга, — за оси x и y . В этой системе отсчета

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \omega, & y &= \rho \sin \omega, \\dx &= -\rho \sin \omega d\omega, & dy &= \rho \cos \omega d\omega, & dz &= 0, \\u &= -V \sin \omega, & v &= V \cos \omega, & \omega &= 0.\end{aligned}$$

Откуда,

$$\mu = \int_0^{2\pi} \rho V (\sin^2 \omega + \cos^2 \omega) d\omega = 2\pi \rho V, \quad V = \frac{\mu}{2\pi \rho}.$$

Таким образом, эта скорость обратно пропорциональна расстоянию $MN = \rho$, как и было найдено выше другим способом.

49. Прямое доказательство. Для того чтобы получить выражение функции φ , нет необходимости сравнивать уравнения гидродинамики и электродинамики между собой, что было проделано нами выше. Как было доказано, это выражение может быть получено непосредственно.

Для простоты будем говорить, что функция φ порождена контуром C , когда она обусловлена вихревой трубкой, осью которой является контур C , а момент принимается равным единице. Выбор единицы, очевидно, ничего не меняет в большинстве наших доказательств. Приведем сначала несколько теорем, которые будут необходимы для получения выражения функции φ .

50. Теорема I. Рассмотрим замкнутую кривую $ABCD$ (рис. 16). Соединим две точки B, D этой кривой некоторым путем BD . Таким образом образуются два частичных контура $ABED, BCDE$ и один полный контур $ABCD$. Допустим, что эти контуры образуют оси трех вихревых трубок T', T'' и T . Каждый из контуров порождает функцию φ . Пусть φ', φ'' и φ — функции соответствующие T', T'' и T , соответственно. Тогда

$$\varphi = \varphi' + \varphi''.$$

Действительно, через три кривые можно провести некоторую поверхность, определяющую два разреза. Функция φ допускает существование двух разрезов; при этом φ' допускает только разрез (1), а φ'' — только (2). Для того чтобы вывести теорему, достаточно показать, что тождественно имеем

$$\varphi - \varphi' - \varphi'' = 0.$$

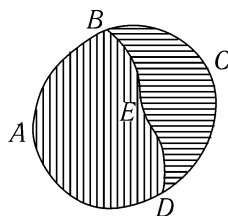


Рис. 16

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta(\varphi - \varphi' - \varphi'') = 0,$$

так как

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi' = \Delta\varphi'' = 0.$$

Она равняется нулю в бесконечности так же, как и частичные функции $\varphi, \varphi', \varphi''$. Это позволяет применить к функции теорему Грина п. 34, если она является однозначной, то есть если интеграл

$$\int d\varphi - \int d\varphi' - \int d\varphi'' = 0$$

вдоль некоторого замкнутого контура. Предположим, что кривая интегрирования будет кривой первого вида, то есть не будет пересекать никакой разрез, тогда три частных интеграла равны нулю. Если кривая пересекает только разрез (1), то $\int d\varphi$ равен моменту трубки T , т. е., согласно гипотезе, единице. $\int d\varphi'$ равен моменту трубки T' , т. е. также единице¹. $\int d\varphi''$ равен нулю. Уравнение снова выполняется. Это можно было бы установить тем же способом, при условии, что кривая интегрирования пересекает только разрез (2).

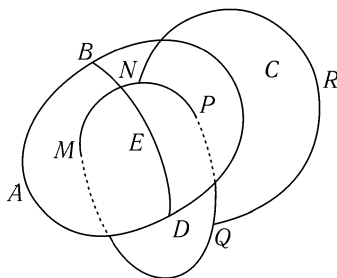


Рис. 17

Некоторый замкнутый контур всегда может быть заменен рядом контуров, каждый из которых пересекает только один разрез (рис. 17).

¹Равенство момента трубки T' единице следует из того, что момент трубки постоянен вдоль контура, а на отрезке BAD моменты трубок T и T' равны. — Прим. ред.

Поэтому контур $MNPQ$, пересекающий два разреза, может быть заменен на $MNRQM$, который пересекает только первый разрез и $NPQRN$, который пересекает только второй разрез. Действительно, эти два контура меняют направление для того, чтобы обойти начальный контур в определенном направлении, а дуга NRQ побегает один раз в одном направлении и один раз в противоположном и в результате исчезает. Следовательно, вдоль некоторого контура

$$\int d\varphi - \int d\varphi' - \int d\varphi'' = 0.$$

Функция $\varphi - \varphi' - \varphi''$ является однозначной и, следовательно, по теореме Грина, тождественно равна нулю.

51. Теорема II. *Функция φ , порожденная плоским контуром C , равняется нулю в любой точке плоскости.*

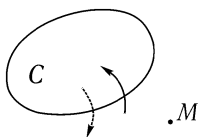


Рис. 18

Пусть C — контур (рис. 18). Обозначим направление вихря стрелкой и рассмотрим отражение относительно плоскости контура. Функция φ при этом не должна изменяться. Точка M , принадлежащая плоскости симметрии, не изменяется; момент трубки сохраняет то же абсолютное значение, но меняет знак, так как движение вихря меняет направление. Функция φ в точке M в одно и то же время не должна изменяться и должна поменять знак. Следовательно, она может быть равна только нулю.

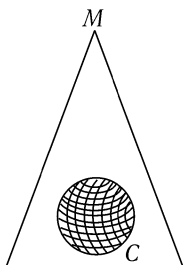


Рис. 19

52. Теорема III. *Предположим, что контур C прочерчен на поверхности конуса, имеющего вершину в точке M (рис. 19). Можно прочертить на поверхности конуса два вида кривых: первые, ограничивающие площадь, в которой вершина отсутствует; другие, производящие оборот вокруг конуса и ограничивающие площадь, которая включает в себя вершину.*

а. Для кривых первого вида функция φ равна нулю в точке M .

Действительно, можно разложить C на бесконечно малые контуры, каждый из которых может быть отождествлен с плоским элементом, находящимся в плоскости, касательной к конусу: так как все эти касательные плоскости проходят через вершину конуса M , то функция φ , порожденная каждой из них, равна нулю. Функция φ , порожденная полным

контуром C , являющимся суммой элементарных функций п. 50, будет также равна нулю.

б. Пусть теперь существуют две кривые второго вида $ABCD$ и $A'B'C'D'$ (рис. 20). Тогда функции φ , порожденные этими двумя кривыми, имеют одинаковое значение в точке M .

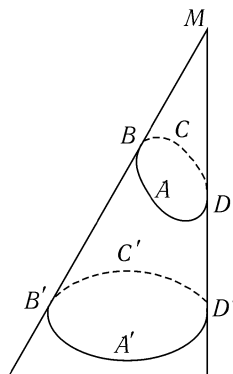


Рис. 20

Действительно, соединим, например, образующей BB' точку B первой кривой с точкой B' второй кривой; соединим таким же образом DD' . Затем заменим контур $ABCD$ на контуры $A'B'C'D'$, $ABB'A'D'DC$, $CDD'C'B'BC$. Описывая последовательно эти три контура в направлении, указанном последовательностью букв, обойдем каждую из дуг, за исключением $ABCD$, два раза в противоположных направлениях. Функции φ , порожденные двумя последними контурами, равны нулю согласно первой части теоремы (а). Таким образом, функции, порожденные кривыми $ABCD$ и $A'B'C'D'$, имеют одинаковое значение в вершине конуса.

53. Бесконечно малый контур. Вид функции φ . Пусть контур бесконечно мал. Функция φ , *a priori*, может зависеть от расстояния r между точкой M и элементарной поверхностью, ограниченной контуром; от угла ψ между прямой, соединяющей точку M с центром тяжести элемента, и вектором площади элемента поверхности; от площади этого элемента и, наконец, от его вида. Другими словами, φ может зависеть от r , от ψ , от телесного угла и от формы конуса с точкой M в качестве вершины и контуром в качестве направляющей.

Сначала покажем, что φ не может зависеть от формы конуса. Действительно, рассматриваемая бесконечно малая площадь первого порядка может быть разложена на квадраты, которые будут бесконечно малыми второго порядка. Все квадраты имеют одинаковую форму, а угол ψ имеет одинаковое значение для каждого из них с точностью до бесконечно малых высшего порядка. Кроме того, какова бы ни была форма рассматриваемой площади, количество квадратов можно сделать таким, чтобы их совокупность отличалась от исходной площади как

угодно мало. Значением φ , образованной полным контуром, будет сумма функций φ каждого из квадратов. Эти функции будут одинаковы для каждого квадрата, поскольку r и ψ одинаковы и квадраты имеют одинаковую форму. Таким образом, полная функция φ будет пропорциональна числу квадратов, то есть площади, ограниченной контуром, и не будет зависеть от его формы. Следовательно, установим следующее соотношение

$$\varphi = f(r, \psi)d\sigma,$$

где $d\sigma$ — телесный угол конуса и f — функция, которую необходимо определить.

Телесный угол $d\sigma$ имеет одно и то же значение вдоль конуса; с другой стороны, две замкнутые кривые C и C' , проведенные на конусе, должны порождать одинаковые функции φ ; однако для этих двух кривых r и ψ могут быть любыми. Таким образом, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$f(r, \psi) = \text{const} = A.$$

54. Рассмотрим конечную замкнутую кривую. Разложим ее на элементарные кривые, для каждой из которых φ пропорциональна телесному углу $d\sigma$. Для их совокупности получим соотношение

$$\varphi = A\sigma,$$

где σ — полный телесный угол.

Для того чтобы определить A , предположим, что точка M описывает некоторый замкнутый контур, откуда следует, что

$$\int d\varphi = A \int d\sigma,$$

если назовем μ моментом вихревой трубки, то

$$\int d\varphi = \mu.$$

С другой стороны, справедливо равенство

$$\int d\sigma = 4\pi,$$

откуда

$$\mu = 4\pi A$$

и

$$\varphi = \frac{\mu\sigma}{4\pi}.$$

55. Жидкость, полностью заполняющая односвязный сосуд. Мы ставим себе целью определить u, v, w по следующим уравнениям

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$

.....

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

которые в электродинамике соответствуют уравнениям

$$4\pi u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},$$

.....

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$$

В случае, когда жидкость заполняет односвязный сосуд, необходимо, чтобы нормальная к поверхности составляющая скорости равнялась нулю в любой точке этой поверхности. Если обозначить через l, m, n направляющие косинусы нормали, то это условие запишется следующим образом

$$lu + mv + nw = 0.$$

Для получения соответствующей электродинамической задачи необходимо предположить, что токи преобладают внутри поверхности стенки S , а все внешнее пространство занимает сверхпроводник. Если, начиная от состояния покоя, постепенно увеличивать внутренние токи, то во внешнем пространстве появятся токи индукции. После установления процесса электродвижущая сила индукции исчезнет, однако токи индукции останутся, поскольку внешняя среда является сверхпроводником (т. е. ее сопротивление равно нулю). В данной постановке электродинамическая задача совпадает с задачей Гельмгольца.

Действительно, пусть существует замкнутая окружность, N — поток магнитной силы, пересекающий окружность, а электродвижущая сила индукции выражается через $\frac{dN}{dt}$ и по закону Ома равна

$$\frac{dN}{dt} = Ri.$$

Для сверхпроводника $R = 0$ и, следовательно,

$$\frac{dN}{dt} = 0, \quad N = \text{const.}$$

В начальный момент времени в состоянии покоя $N = 0$ и в последующие моменты времени N также равен нулю. Таким образом, никакие силовые линии не пересекут поверхность S , т.е. составляющая магнитной силы, нормальная к этой поверхности, равна нулю.

56. Частный случай. Скорость параллельна плоскости xy и зависит только от x и y . Тогда имеются следующие соотношения

$$w = 0, \quad \frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} = 0.$$

Если эти условия выполняются в начальный момент времени, то они будут выполняться всегда, когда:

1° жидкость бесконечна, так как любая плоскость, параллельная плоскости xy , является плоскостью симметрии;

2° жидкость заполняет цилиндр, параллельный оси Oz , бесконечный в обоих направлениях. Это также будет справедливо, если этот цилиндр ограничен двумя плоскостями, перпендикулярными оси z . Действительно, когда в жидкость вводится перегородка, то в общем на движение накладывается еще одно условие, а именно: что составляющая скорости, нормальная к перегородке, будет равна нулю в каждой ее точке. Но в рассматриваемом нами случае это условие выполняется до того, как присутствие помещенной перегородки не изменит движения.

57. Согласно гипотезам, выдвинутым нами ранее, справедливы следующие равенства

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (5)$$

и уравнение неразрывности приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Все вихри параллельны оси Oz , все вихревые трубки являются цилиндрами с осью Oz .

Рассмотрим одну из этих трубок в ее движении. Покажем, что ее перпендикулярное сечение остается постоянным.

Действительно, рассмотрим часть жидкости, ограниченную поверхностью вихревой трубки и двумя перпендикулярными сечениями, отдаленными друг от друга на расстояние h .

Если обозначим через ω площадь этого перпендикулярного сечения, то объем жидкости будет иметь вид $h\omega$.

Жидкость является несжимаемой, поэтому этот объем остается постоянным. С другой стороны, вихревая трубка сохраняется неизменной, и объем остается цилиндрическим. Частица, в начальный момент времени находящаяся в перпендикулярном сечении трубки, не покинет его, так как ее скорость расположена в этой плоскости. Таким образом, два сечения, ограничивающие цилиндр, всегда будут находиться на одинаковом расстоянии друг от друга. Поскольку $h\omega$ и h постоянны, следовательно, и ω постоянна.

В частности, если рассмотрим вихревую трубку бесконечно малого сечения $d\omega$, то ее момент μ задан через соотношение

$$\mu = 2d\omega\zeta,$$

где $d\omega$ должно быть постоянным так же, как μ и, следовательно, ζ — константа, и

$$\frac{d\zeta}{dt} = 0$$

($\frac{d\zeta}{dt}$, а не $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$, т. к. мы наблюдаем за частицей в движении, т. е. принимаем лагранжевы переменные).

58. Рассматриваемый нами случай был назван Гельмгольцем случаем прямолинейных вихрей:

Предположим, в частности, что имеется вихревая трубка, сечение которой плоскостью xy является окружностью радиуса R . Внутри этой окружности $\zeta = \text{const}$, вне ее — $\zeta = 0$, и, кроме того, существует функция скоростей. Примем за начало отсчета центр окружности.

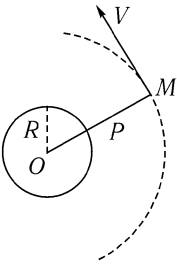


Рис. 21

Пусть M — некоторая точка (рис. 21). Положим

$$OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В силу симметрии, скорость V точки M перпендикулярна радиус-вектору OM . Получим соотношения

$$u = -V \frac{y}{\rho}, \quad v = V \frac{x}{\rho},$$

где V зависит только от ρ . Возьмем интеграл

$$J = \int (u dx + v dy) = \int 2\zeta d\omega$$

вдоль окружности, описанной вокруг центра O с радиусом $OM = \rho$. Этот интеграл представляет собой работу силы, представленной вектором скорости (u, v, w) , по переносу материальной точки вдоль окружности. Вектор скорости имеет постоянную величину и направлен во всех точках по касательной к окружности, следовательно,

$$\int (u dx + v dy) = 2\pi\rho V.$$

Получим другое выражение для J посредством интеграла $\int 2\zeta d\omega$, взятого по всей поверхности окружности OM .

Разделяются два случая:

1° Точка M находится внутри окружности радиуса R ($\rho < R$); ζ является постоянным внутри окружности ρ и

$$J = 2\pi\zeta\rho^2 = 2\pi\rho V.$$

2° Точка M находится вне окружности R ($\rho > R$); ζ снова является постоянным внутри окружности R и равным нулю вне ее. Таким образом, справедливо равенство

$$J = 2\pi\zeta R^2 = 2\pi\rho V.$$

Отсюда выводим, что

$$V = \zeta\rho,$$

если ρ меньше, чем R , и

$$V = \zeta \frac{R^2}{\rho},$$

если ρ больше, чем R .

В последнем случае отметим, что момент вихревой трубки равен

$$2\pi\zeta R^2 = 2\pi m,$$

где

$$m = \zeta R^2,$$

тогда V принимает вид

$$V = \frac{m}{\rho}.$$

Эта формула по-прежнему будет справедливой, если R становится очень маленьким, а ζ очень большим так, что m остается конечным.

59. Этот результат можно сравнить с тремя другими результатами.

1° *Электродинамическая аналогия.* Выше мы показали, что скорость частицы представлена тем же вектором, что и сила магнитного поля, произведенная, согласно закону Био–Лапласа, током, проходящим через вихревую трубку п. 45.

60. 2° *Аналитическая аналогия.* Вне вихревой трубки $\zeta = 0$. Согласно этому условию и уравнению неразрывности (2) п. 57,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}. \quad (7)$$

Эти уравнения выражают то, что $v + \sqrt{-1}u$ является функцией от $x + y\sqrt{-1}$. В настоящем случае это легко проверить. Действительно,

$$v + \sqrt{-1}u = m \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \sqrt{-1} \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{m}{x + \sqrt{-1}y}.$$

Положим

$$Z = x + \sqrt{-1}y,$$

тогда можем записать

$$v + \sqrt{-1}u = f(Z) = \frac{m}{Z}. \quad (8)$$

61. Если имеется несколько вихревых трубок, то плоскость xy пересекает каждую из них по бесконечно малым окружностям, которые можно ассоциировать с точками $a_1, a_2, \dots, a_n$, совпадающими с их центрами. Пусть $2\pi m_1, 2\pi m_2, \dots, 2\pi m_n$ — моменты этих трубок. Если $a'_1, a''_1, a'_2, a''_2, \dots$ — координаты точек $a_1, a_2, \dots$, то эти точки могут быть заданы мнимыми величинами

$$a_1 = a'_1 + \sqrt{-1} a''_1,$$

$$a_2 = a'_2 + \sqrt{-1} a''_2,$$

.....

Для того чтобы получить значение $v + \sqrt{-1}u$, соответствующее первой трубке a_1 , достаточно применить формулу (8) переместив начало отсчета в точку $a_1, \dots$ То же справедливо и для других трубок. Полное значение $v + \sqrt{-1}$ будет суммой полученных таким образом частичных значений

$$v + \sqrt{-1}u = \frac{m_1}{Z - a_1} + \frac{m_2}{Z - a_2} + \dots + \frac{m_n}{Z - a_n} = \sum \frac{m_k}{Z - a_k}.$$

Это выражение является производной функции

$$\theta(Z) = \sum m_k \log(Z - a_k).$$

Пусть M — точка, задаваемая величиной Z , ρ_1 — расстояние Ma_1 или модуль $Z - a_1$. Также $\rho_2 = Ma_2, \dots, \rho_n = Ma_n$. Пусть ω_1 — аргумент $Z - a_1$, т.е. угол, который образует Ma_1 с осью Ox , и так далее. В новых обозначениях

$$\theta(Z) = \sum m_k \log \rho_k + \sqrt{-1} \sum m_k \omega_k$$

или, полагая

$$\psi = \sum m_k \log \rho_k \tag{9}$$

и

$$\varphi = \sum m_k \omega_k, \tag{10}$$

получим

$$\theta(Z) = \psi + \sqrt{-1}\varphi. \tag{11}$$

Дифференцируя это тождество по Z , отметим, что выполняются соотношения

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \sqrt{-1},$$

$$\theta'(Z) = v + \sqrt{-1}u = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\theta'(Z) = \sqrt{-1}v - u = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \sqrt{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Откуда, отождествляя,

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (12)$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (13)$$

Из соотношений (13) видно, что φ является функцией скоростей.

62. 3° *Электростатическая аналогия.* Положим, что электрический заряд равномерно распределен по бесконечной прямой. Притяжение некоторой точки к этой наэлектризованной прямой обратно пропорционально расстоянию.

Заменим вихревую трубку равномерным распределением электрического заряда по ее оси. Притяжение точки M будет направлено по нормали, проведенной из точки M к оси.

Скорость была бы представлена тем же вектором, но с измененным на 90 градусов направлением. В случае нескольких трубок, предприняв ту же замену и сложив частичные притяжения, получим скорость, повернутую на 90 градусов.

Этот же результат можно получить, если полагать, что точки $a_1, a_2, \dots, a_n$ действуют на точку M обратно пропорционально расстоянию.

Если рассмотрим распределенные некоторым образом вихревые трубки, удаленные от точки M на бесконечно большое расстояние первого порядка, то притяжение (или скорость) будет бесконечно малой первого порядка.

63. Кривые $\varphi = \text{const}$, на которых аргумент $e^{\theta(Z)}$ постоянен, в каждой их точке перпендикулярны вектору скорости. Действительно, для этих кривых справедливо равенство

$$d\varphi = u dx + v dy = 0.$$

Кривые $\psi = \text{const}$, вдоль которых вещественная часть функции $\theta(Z)$ или модуль $e^{\theta(Z)}$ постоянны, являются линиями тока. Действительно, вдоль этих кривых имеем соотношения

$$u dx - v dy = 0$$

или

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}.$$

В электродинамике уравнения $\varphi = \text{const}$ представляют эквипотенциальные линии, а уравнения $\psi = \text{const}$ — силовые линии. В этом заключается основное отличие электродинамики от электростатики.

Эти две системы кривых пересекаются под прямым углом.

64. Частный случай двух вихревых трубок. Если имеется только две вихревые трубки a_1 и a_2 , то функция $\theta(Z)$ включает только два члена

$$\theta(Z) = m_1 \log(Z - a_1) + m_2 \log(Z - a_2).$$

Уравнение линий тока примет вид

$$m_1 \log \rho_1 + m_2 \log \rho_2 = \text{const}.$$

Если $m_1 = m_2$, то уравнение становится следующим

$$\rho_1 \rho_2 = \text{const}.$$

Линии тока являются овалами Кассини.

Если $m_1 = -m_2$, то линии тока, представленные уравнением

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \text{const},$$

являются окружностями, по отношению к которым точки a_1 и a_2 сопряжены.

ГЛАВА 4

Движение вихревых трубок

65. Теорема о сохранении центра масс. *Предположим, что имеется n вихревых трубок $a_1, a_2, \dots, a_n$ с моментами $2\pi m_1, 2\pi m_2, \dots, 2\pi m_n$. Допустим, что трубки перемещаются, но их моменты остаются теми же. Если считать $m_1, m_2, \dots$ массами, тогда можно определить их центр масс G . Покажем, что во время перемещения трубок точка G остается неподвижной.*

Пусть $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ — координаты вихревых трубок $a_1, a_2, \dots, a_n$, а x_0, y_0 — координаты точки G , эти координаты связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned}x_0 \sum m_k &= \sum m_k x_k, \\y_0 \sum m_k &= \sum m_k y_k.\end{aligned}$$

При рассмотрении трубок конечной размерности x_0, y_0 определяются аналогичным образом:

$$x_0 \int 2\zeta d\omega = \int 2x\zeta d\omega \text{ и т. д.,}$$

где интегралы взяты по всем элементам $d\omega$ сечения различных трубок.

Поскольку мы предположили, что моменты трубок остаются постоянными, а ζ и ω не зависят от t п. 57, то, продифференцировав по t , получим

$$\frac{dx_0}{dt} \int \zeta d\omega = \int \frac{dx}{dt} \zeta d\omega = \int u \zeta d\omega. \quad (1)$$

Покажем, что этот последний интеграл равен нулю. Для этого рассмотрим интеграл

$$\int [(u^2 - v^2) dx + 2uv dy],$$

взятый по всей длине окружности очень большого радиуса. Этот интеграл равен нулю. Действительно, для достаточно большого R , u и v

являются бесконечно малыми первого порядка п. 62; u^2 , v^2 , uv — бесконечно малые второго порядка, а путь интегрирования — бесконечно большой первого порядка. Таким образом, этим интегралом можно пренебречь.

С другой стороны, преобразуем этот интеграл по формуле (1) из п. 8:

$$\int [(u^2 - v^2) dx + 2uv dy] = \int dw \left[\frac{\partial(u^2 - v^2)}{\partial y} - \frac{2\partial(uv)}{\partial x} \right].$$

Выполним дифференцирование

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u^2 - v^2)}{\partial y} - \frac{2\partial(uv)}{\partial x} &= 2u \frac{\partial u}{\partial y} - 2v \frac{\partial v}{\partial y} - 2u \frac{\partial v}{\partial x} - 2v \frac{\partial u}{\partial x} = \\ &= -2v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Учитывая уравнение неразрывности, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

и, с другой стороны, по определению

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\zeta.$$

Таким образом, имеем следующее выражение

$$\int [(u^2 - v^2) dx + 2uv dy] = -4 \int u\zeta d\omega.$$

Первый интеграл равен нулю, следовательно, второй также равен нулю. Таким образом, справедливо равенство

$$\frac{dx_0}{dt} = 0.$$

Так же можно доказать, что

$$\frac{dy_0}{dt} = 0,$$

и, следовательно, точка G неподвижна.

66. Движение центра масс вихревой трубки. Рассмотрим движение центра масс одной из вихревых трубок. Имеем соотношение

$$\frac{dx_0}{dt} \int \zeta d\omega = \int u\zeta d\omega.$$

Положим

$$u = u' + u'',$$

где u' — скорость, возникающая в рассматриваемой трубке, если бы она была единственной, а u'' — скорость, возникающая за счет других трубок. Приходим к равенству

$$\int u \zeta d\omega = \int u' \zeta d\omega + \int u'' \zeta d\omega.$$

Интеграл $\int u' \zeta d\omega$ равен нулю, так как если бы первая трубка рассматривалась отдельно от остальных, то ее центр масс был бы неподвижным.

Следовательно, если мы захотим определить скорость центра масс одной из вихревых трубок, то будет достаточно вычислить скорости, сообщенные ей другими вихрями.

67. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — вихревые трубки. Положим

$$\rho_{12} = \overline{a_1 a_2}, \quad \rho_{13} = \overline{a_1 a_3},$$

и, вообще,

$$\rho_{ik} = \overline{a_i a_k}.$$

Рассмотрим функцию

$$P = \sum m_i m_k \log \rho_{ik}, \quad (2)$$

она зависит от $2n$ координат $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$.

Можно определить $\frac{dx_1}{dt}$ и $\frac{dy_1}{dt}$; при этом получаем, что скорость точки x_1, y_1 будет такой же, как если бы трубка a_1 не рассматривалась, а принимались во внимание только остальные трубки. Таким образом, согласно уравнению (12) п. 61 получим

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

где

$$\psi = \sum m_k \log \rho_{1k}.$$

Эти формулы равносильны следующим

$$m_1 \frac{dx_1}{dt} = -\frac{\partial P_1}{\partial y_1}, \quad m_1 \frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x_1}.$$

Действительно, функцию P можно записать в виде

$$P = m_1 \sum m_k \log \rho_{1k} + \sum m_i m_k \log \rho_{ik},$$

где ни один из индексов i и k во второй сумме не равен единице.

С другой стороны, ρ с индексом 1 являются единственными, зависящими от x_1 и y_1 , следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = m_1 \frac{\partial(\sum m_k \log \rho_{1k})}{\partial x_1} = m_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

и также

$$\frac{\partial P}{\partial y_1} = m_1 \frac{\partial \psi}{\partial y_1}.$$

68. В общем случае получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} m_k \frac{dx_k}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial y_k}, \\ m_k \frac{dy_k}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial x_k}. \end{aligned} \tag{I}$$

В этой форме можно распознать гамильтоновы канонические уравнения с точностью до множителя m_k . Для того чтобы точно привести их к каноническому виду, достаточно рассмотреть переменные

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \text{и} \quad m_1 y_1, m_2 y_2, \dots, m_n y_n.$$

69. Интегрирование уравнений. Интегрирование уравнений (I) возможно, когда существует только три вихревые трубки, что и будет нами доказано.

70. Теорема. Можно снова доказать теорему о сохранении центра масс. Действительно, функция P зависит только от расстояний ρ , то есть только от разностей $x_1 - x_2, \dots, y_1 - y_2, \dots$ и т. д. Следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial y_1} + \frac{\partial P}{\partial y_2} + \dots + \frac{\partial P}{\partial y_n} = 0$$

либо

$$\sum \frac{\partial P}{\partial y_k} = 0, \quad \sum m_k \frac{dx_k}{dt} = 0, \quad (3)$$

$$\sum_k m_k x_k = \text{const.}$$

И также

$$\sum_k m_k y_k = \text{const.}$$

Таким образом, центр масс системы остается неподвижным.

71. Теорема живых сил¹. Умножим два уравнения (I) соответственно на $-dy_k$ и dx_k ; произведем те же действия со всеми аналогичными уравнениями и сложим их. Тогда получим

$$\sum \frac{\partial P}{\partial x_k} dx_k + \sum \frac{\partial P}{\partial y_k} dy_k = 0$$

или

$$dP = 0.$$

Таким образом,

$$P = \text{const.} \quad (4)$$

Данное соотношение выражает теорему живых сил. Это сложно заметить сразу, поэтому нам придется устранить некоторые возникшие трудности. Действительно, согласно нашим предположениям, живая сила будет бесконечной по трем причинам:

1° Жидкость бесконечна во всех направлениях. Мы показали, что при введении двух плоских твердых перегородок, перпендикулярных оси Oz , движение не видоизменяется. Таким образом, можно ограничиться рассмотрением жидкости, заключенной между двумя плоскостями;

2° Даже учитывая это ограничение, живая сила снова будет бесконечной, поскольку жидкость бесконечна в плоскости xy . Составляющие скорости u и v на окружности бесконечно большого радиуса R первого порядка являются бесконечно малыми первого порядка п. **62**. Элементарная живая сила при этом представляет собой бесконечно малую второго порядка, однако полная живая сила остается бесконечной.

¹Под живой силой понимается кинетическая энергия. — *Прим. ред.*

Обозначив через $2\pi M$ сумму моментов всех вихревых трубок, скорость на окружности радиуса R принимает значение

$$V = \frac{M}{R}$$

с точностью до бесконечно малых второго порядка.

Предположим, что M равна нулю, тогда скорость (u, v) является бесконечно малой второго порядка, элементарная живая сила является бесконечно малой четвертого порядка, и полная живая сила конечна.

3° Предположим также, что вихревые трубки не являются бесконечно тонкими, в противном случае скорость в окрестности этих трубок будет бесконечно большой первого порядка, а живая сила — бесконечно большой второго порядка.

72. Допустим, что живая сила конечна. Для этого достаточно, как мы увидели, чтобы: 1° жидкость ограничивалась бы двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными оси Oz ; 2° сумма моментов всех трубок равнялась нулю; 3° трубки имели бы конечное сечение.

Рассмотрим два малых элемента поверхности $d\omega$ и $d\omega'$, соответствующих значениям ζ и ζ' вихря. Пусть $2\pi dm$, $2\pi dm'$ — моменты элементарных трубок, ограниченных этими элементами, так что

$$\begin{aligned} 2\zeta d\omega &= 2\pi dm, \\ 2\zeta' d\omega' &= 2\pi dm'. \end{aligned}$$

Слагаемое в P , соответствующее этим элементам, имеет вид

$$dm dm' \log \rho,$$

где ρ — расстояние между элементами. Общая функция P равна

$$P = \iint dm dm' \log \rho$$

или

$$P = \iint \frac{\zeta \zeta' d\omega d\omega' \log \rho}{\pi^2}, \quad (5)$$

где интеграл вычисляется по всем сочетаниям элементов $d\omega$ и $d\omega'$, каждое из которых взято только один раз. Пусть x, y и x', y' — координаты центров масс элементов $d\omega$ и $d\omega'$; значение ψ в точке (x, y) примет вид

$$\psi = \int dm' \log \rho = \int \frac{\xi' d\omega' \log \rho}{\pi}.$$

С другой стороны, справедливо равенство

$$2\pi^2 P = \iint \xi \xi' d\omega d\omega' \log \rho,$$

интеграл, взятый по *всем* сочетаниям $(d\omega, d\omega')$, каждое из которых взято дважды так, что

$$2\pi^2 P = \pi \int \zeta \psi d\omega. \quad (6)$$

73. Эту формулу также можно получить, обращаясь к электростатической аналогии п. **62**.

Действительно, если будем считать dm, dm' электрическими зарядами, распространенными по элементам $d\omega, d\omega'$, то функция ψ будет представлять, с точностью до постоянного множителя, электростатический потенциал, а функция P — электростатическую энергию. Как известно, между этими двумя функциями существует соотношение вида (6).

74. В выражении для P заменим 2ζ на ее значение

$$4\pi P = \int 2\zeta \psi d\omega = \int \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) \psi d\omega.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int (v dy + u dx) \psi. \quad (7)$$

Взятый вдоль окружности очень большого радиуса, этот интеграл равен нулю, так как мы предположили (п. **72**), что алгебраическая сумма моментов всех трубок равна нулю. При этом u и v имеют второй порядок малости, а длина окружности бесконечно большая только первого порядка. Преобразовав приведенный интеграл по теореме Стокса, получим

$$\int \left(\frac{d(\psi v)}{dx} - \frac{d(\psi u)}{dy} \right) d\omega = 0,$$

после выполнения дифференцирования

$$\int \psi \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) d\omega + \int \left(v \frac{d\psi}{dx} - u \frac{d\psi}{dy} \right) d\omega = 0.$$

Используя соотношения

$$2\zeta = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}, \quad \frac{d\psi}{dx} = v, \quad \frac{d\psi}{dy} = -u,$$

получаем

$$4\pi P + \int (v^2 + u^2) d\omega = 0. \quad (8)$$

Таким образом, P представляет, с точностью до постоянного множителя, живую силу $\int (v^2 + u^2) d\omega$, и эта живая сила постоянна.

75. Теорема. *Момент инерции масс m относительно оси Oz является постоянным.*

Повернем систему вокруг оси z на бесконечно малый угол ε . Пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, координаты x_i и y_i становятся

$$x_i - y_i\varepsilon, \quad y_i + x_i\varepsilon.$$

Функция P п. 71, зависящая только от расстояний ρ_{ik} , при этом не изменится.

Поскольку $dP = 0$, получим уравнение

$$\sum -\frac{dP_i}{dx_i} y_i\varepsilon + \sum \frac{dP}{dy_i} x_i\varepsilon = 0$$

или

$$\sum \left(x_i \frac{dP}{dy_i} - y_i \frac{dP}{dx_i} \right) = 0.$$

В электростатической аналогии это уравнение означает, что сумма моментов сил притяжения, одних наэлектризованных прямых к другим, относительно оси z , равна нулю. Это очевидно, поскольку притяжения попарно равны и имеют противоположные знаки.

Если заменим $\frac{dP}{dy_i}$ и $\frac{dP}{dx_i}$ на $m_i \frac{dx_i}{dt}$ и $-m_i \frac{dy_i}{dt}$, то получим

$$\sum m_i \left(x_i \frac{dx_i}{dt} + y_i \frac{dy_i}{dt} \right) = 0,$$

или, проинтегрировав,

$$\sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \text{const.} \quad (9)$$

76. Теорема. Сумма моментов количества движения относительно оси z постоянна.

Если f является однородной функцией первой степени, то по теореме Эйлера

$$x \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy} + z \frac{df}{dz} = f,$$

или

$$\sum x \frac{df}{dx} = f,$$

или, наконец,

$$\sum x \frac{d \log f}{dx} = 1.$$

Применим это выражение к функции P . Функция ρ_{ik} является однородной функцией первой степени относительно x_i, y_i , координаты x_k, y_k и другие не рассматриваются. Следовательно,

$$x_i \frac{d \log \rho_{ik}}{dx_i} + y_i \frac{d \log \rho_{ik}}{dy_i} + \dots = 1,$$

или, умножая все члены на $m_i m_k$,

$$\sum \left(x_p \frac{d m_i m_k \log \rho_{ik}}{dx_p} + y_p \frac{d m_i m_k \log \rho_{ik}}{dy_p} \right) = m_i m_k,$$

суммирование взято по всем значениям p , от единицы до n . Просуммировав получившееся уравнение по всевозможным сочетаниям i и k , получим

$$\sum \left(x_p \frac{dP}{dx_p} + y_p \frac{dP}{dy_p} \right) = \sum m_i m_k.$$

В силу уравнений (I) п. 68 это соотношение равносильно равенству

$$\sum m_p \left(x_p \frac{dy_p}{dt} - y_p \frac{dx_p}{dt} \right) = \sum m_i m_k. \quad (10)$$

Левая часть уравнения является суммой моментов количества движения, а правая — постоянной.

77. Итак, мы нашли три интеграла дифференциальных уравнений (I), свойства этих уравнений позволяют нам проинтегрировать их в квадратурах, если существует только три вихревых трубки.

Действительно, наши уравнения имеют форму канонических уравнений Гамильтона, которые интегрируются в квадратурах, когда они содержат $2n$ переменных, и известно n частных интегралов. В случае трех вихревых трубок уравнения содержат шесть переменных $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ и найдено три частных интеграла.

ЗАМЕЧАНИЕ РЕДАКЦИИ. В п. 77 остается неясным, какие три интеграла имел в виду А. Пуанкаре. В пп. 65, 70, 71, 75 им были найдены четыре различных интеграла:
координаты центра вихря

$$P = \sum m_i x_i = \text{const}, \quad Q = \sum m_i y_i = \text{const},$$

гамильтониан

$$H = \sum m_i m_j \log \rho_{ij} = \text{const},$$

и момент инерции относительно оси Oz

$$I = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \text{const}.$$

Сохраняющаяся величина (4.10) п. 76, очевидно, не является дополнительным интегралом, поскольку получается из гамильтониана с помощью некоторого тождества. Смысл же выражения (4.10) п. 76 в целом состоит, по-видимому, в приведении интересного свойства движения прямолинейных вихрей, аналогичного закону сохранения момента в небесной механике.

В общем случае приведенные четыре интеграла не инволютивны, поэтому простое их указание (даже всех четырех) не является доказательством интегрируемости системы. Гамильтониан H и момент инерции I находятся в инволюции, третьим же интегралом в инволюции является $P^2 + Q^2$. Таким образом, задача 3-х вихрей действительно является интегрируемой. Современное изложение данного вопроса можно найти в книге А. В. Борисова, И. С. Мамаева «Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике».

ГЛАВА 5

Случай двух вихревых трубок, метод изображений

78. Пусть существуют две вихревых трубки a_1, a_2 , моменты которых — $2\pi m_1$ и $2\pi m_2$. Их центр масс G находится на прямой $a_1 a_2$ и определяется условием

$$\frac{Ga_1}{Ga_2} = -\frac{m_2}{m_1}$$

(сегменты Ga_1, Ga_2 взяты с их знаком).

Как мы уже показали в п. **65**, точка G остается неподвижной. Скорость точки a_2 будет такой же, как если бы существовал только один вихрь a_1 , то есть

$$\frac{m_1}{a_1 a_2},$$

и эта скорость направлена перпендикулярно $a_1 a_2$.

Точка G неподвижна, три точки a_1, G, a_2 всегда находятся на прямой линии, а скорость точки a_2 всегда перпендикулярна к радиус-вектору Ga_2 , поэтому траектория точки a_2 представляет собой окружность с центром в точке G , радиус которой — Ga_2 . Траектория точки a_1 будет также окружностью с центром в точке G и радиусом Ga_1 . Поскольку расстояние $a_1 a_2$ остается неизменным, то скорости двух точек, равные соответственно $\frac{m_1}{a_1 a_2}$ и $\frac{m_2}{a_1 a_2}$, будут постоянными.

79. Пусть m_1 и m_2 будут противоположных знаков. Точка G будет находиться вне отрезка $a_1 a_2$ и определяться условием

$$\frac{\overline{Ga_1}}{\overline{Ga_2}} = -\frac{m_2}{m_1}.$$

В частности, если $m_1 = -m_2$, то точка G находится в бесконечности и траектории точек a_1 и a_2 превращаются в прямые, перпендикулярные $a_1 a_2$.

Обе трубки при этом движутся с одинаковой скоростью

$$\frac{m_1}{a_1 a_2} = V.$$

Если рассмотрим точку M на середине отрезка $a_1 a_2$, то скорость, сообщенная этой точке вихрем a_1 , равна

$$\frac{m_1}{a_1 M_1} = 2 \frac{m_1}{a_1 a_2} = 2V.$$

Вихрь a_2 сообщает такую же скорость

$$\frac{m_2}{M a_2} = \frac{m_1}{a_1 M} = 2V.$$

Таким образом, результирующая скорость точки M равна четырехкратной скорости центров вихревых трубок.

80. Жидкость, заключенная в цилиндрическом сосуде.

Представим, что жидкость заключена в сосуде, имеющем форму цилиндра, образующие которого параллельны оси Oz . В этом сосуде находится вихревая трубка в форме бесконечно тонкого цилиндра, также параллельного Oz .

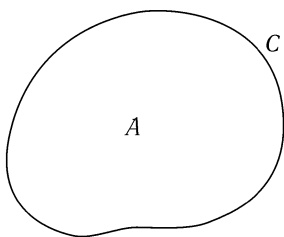


Рис. 22

Пусть C (рис. 22) — сечение сосуда в плоскости xy , и A — точка, в которую проецируется сечение вихревой трубки.

Составляющие скорости u и v должны быть конечными и непрерывными во всей внутренней части сосуда, за исключением точки A .

Уравнение неразрывности приводится к следующему виду

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Поскольку вихрь всюду, за исключением точки A , равен нулю, то справедливо равенство

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Известно, что при этих условиях п. 33 существует функция скоростей φ такая, что

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

а уравнение неразрывности имеет вид

$$\Delta \varphi = 0.$$

В настоящем случае граничное условие заключается в том, что контур C сечения сосуда будет линией тока, т.е., что в каждой точке контура скорость будет касательной к нему. Внутри C $v + \sqrt{-1}u$ должна представлять собой функцию от $x + \sqrt{-1}y$. Эта функция должна вести себя регулярно, за исключением точки A , где она обращается в бесконечность.

Определение u и v может производиться двумя способами:

1° Метод изображений, который применяется только в определенном числе простых случаев;

2° Метод конформных отображений, который является более общим.

81. Метод изображений. Предположим, что сосуд имеет форму кругового цилиндра, параллельного Oz с радиусом R , а окружность C — след этого цилиндра на плоскости xy . Пусть A — след вихревой трубки с моментом 2π (рис. 23).

Соединим центр окружности O с точкой A и обозначим на прямой OA точку B , определенную условием

$$OA \cdot OB = R^2.$$

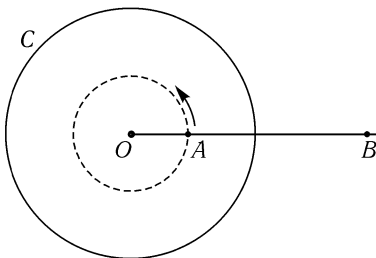


Рис. 23

Вихревая трубка, параллельная оси Oz , следом которой является точка B и момент которой равен -2π , называется изображением точки A по отношению к окружности C .

В бесконечном пространстве, заполненном жидкостью, трубки A и B образуют линии тока, представляющие собой окружности, по отношению к которым B и A были бы сопряженными (п. 64).

В частности, окружность C является линией тока; составляющая скорости, нормальная к окружности, и более обще, нормальная к прямому цилиндру, с окружностью C в основании, равняется нулю. Таким образом, введение твердой перегородки, имеющей форму такой цилиндрической поверхности, не изменит движения внутри рассматриваемой поверхности.

Центр масс трубки A перемещается с той же скоростью, как если бы существовала только одна трубка B , а жидкость была бы бесконечной. Скорость трубки A по абсолютной величине равна отношению $\frac{AB}{2\pi}$

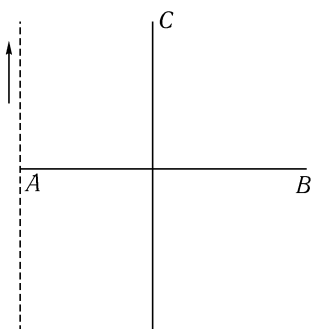


Рис. 24

и всегда направлена перпендикулярно радиус-вектору OAB . Таким образом, точка A описывает концентрическую окружность в C .

Эта траектория не является такой же, как если бы перегородки C не существовало, а поле скоростей оставалось бы тем же самым. Действительно, если жидкость бесконечна, то точка A движется по прямой, перпендикулярной OA п. 79.

82. Если радиус окружности бесконечно увеличивается, то кривая C в конце концов превращается в прямую, а точка B симметрична точке A относительно этой прямой или, иначе говоря, относительно плоскости C , в которую превращается цилиндр. Траектория точки A , перпендикулярная AB , при этом становится прямой, параллельной следу плоскости C (рис. 24).

83. Жидкость, заключенная между двумя концентрическими цилиндрами. Пусть C и C' — следы двух цилиндров вращения с осью Oz на плоскости xy , а A_0 — след бесконечно тонкой вихревой трубки с моментом 2π (рис. 25).

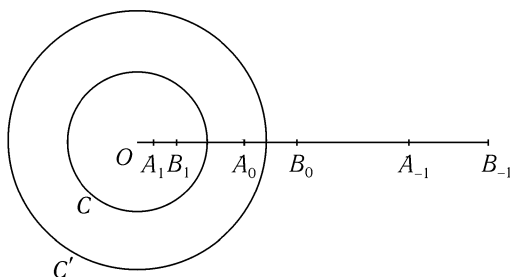


Рис. 25

Пусть B_0 — изображение следа A_0 по отношению к C' , B_1 — изображение следа A_0 по отношению к C , A_{-1} — изображение следа B_1 по отношению к C' и так далее; в конечном итоге имеется бесконечное множество пар точек, сопряженных по отношению к C и C' , что видно

из следующей таблицы:

Сопряженные

По отношению к C'	По отношению к C
$A_0, B_0,$	$B_1, A_0,$
$A_{-1}, B_1,$	$B_0, A_1,$
$A_1, B_{-1},$	$B_2, A_{-1},$
$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$
$A_i, B_{-i},$	$B_{-i}, A_i,$

где индексы принимают значения от $-\infty$ до $+\infty$. Рассмотрим каждую из точек A как след вихревой трубки с моментом 2π и каждую из точек B как след трубки с моментом -2π . Эти трубки будут сопряжены.

Предположим, что все эти трубки реально существуют и что жидкость заполняет бесконечный объем. Тогда скорость жидкости будет такой же, как если бы существовали перегородки с единственной вихревой трубкой A . Вычислим эту скорость, складывая скорости, обусловленные каждой отдельной трубкой. Таким образом, будет получен ряд и перед нами встает вопрос его сходимости.

Согласно соотношениям

$$\begin{aligned} OA_0 \cdot OB_0 &= R'^2, \\ OA_1 \cdot OB_1 &= R^2, \end{aligned}$$

получим

$$\frac{OB_1}{OB_0} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2,$$

а так же

$$\frac{OB_2}{OB_1} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 \text{ и т. д.}$$

Вообще говоря, справедливо равенство

$$OB_n = OB_0 \left(\frac{R}{R'}\right)^{2n}. \quad (1)$$

Таким же способом можно показать, что выполняется равенство

$$OA_n = OA_0 \left(\frac{R}{R'}\right)^{2n}. \quad (2)$$

Сгруппируем члены ряда следующим образом:

1° Члены, относящиеся к трубкам A с отрицательными индексами. Когда индекс n становится очень большим, точка A_{-n} становится очень удаленной, а скорость, сообщенная точке M этой трубкой, становится очень маленькой, порядка $\frac{1}{MA_{-n}}$. Если точка A_{-n} значительно удалена, то разность $OA_{-n} - MA_{-n}$ незначительна и скорость имеет порядок $\frac{1}{OA_{-n}}$. Расстояние OA_{-n} увеличивается в геометрической прогрессии со знаменателем $\left(\frac{R'}{R}\right)^2$. Таким образом, ряд $\frac{1}{OA_{-n}}$ является сходящимся.

2° Члены, относящиеся к трубкам B с отрицательными индексами. Доказательство, идентичное предыдущему, приведет к тому, что ряд $\frac{1}{OB_{-n}}$ является сходящимся.

3° Сгруппируем попарно трубки с положительными индексами

$$A_0, B_0 - A_1, B_1 - \dots - A_n, B_n.$$

Вычтем из равенства (1) равенство (2). Получим

$$A_n B_n = A_0 B_0 \left(\frac{R}{R'}\right)^{2n}. \quad (3)$$

Трубки $A_0, B_0, \dots, A_n, B_n$ имеют попарно равные, но противоположные знаку моменты. Геометрическая сумма скоростей, возникших в паре (A_n, B_n) , имеет такой же порядок величины, что и $A_n B_n$; таким образом, она убывает в геометрической прогрессии со знаменателем $\left(\frac{R'}{R}\right)^2$ и стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности. Следовательно, ряд является сходящимся.

Три частичных ряда являются сходящимися, следовательно, полный ряд также будет сходящимся.

84. Покажем, что окружности C и C' являются линиями тока. Действительно, все трубки сопряжены подвое относительно окружностей C и C' . Объединим трубки в группы из двух точек, сопряженных относительно C . Скорость возникающая в каждой группе, будет касательной к C , следовательно, сама полная скорость будет касательной к C . Для C' имеем аналогичное доказательство.

85. Только что найденное нами решение не единственно, поскольку сосуд не является односвязным. Для получения более общего решения достаточно рассмотреть еще одну трубку с произвольным моментом M и следом в центре O . Действительно, скорость, обусловленная этой трубкой, является касательной к C и C' , так как все линии тока являются окружностями с центром в точке O .

Траектория следа A_0 , очевидно, является окружностью с центром O , т. к. скорость, обусловленная всеми трубками, всегда перпендикулярна радиус-вектору OA_0 .

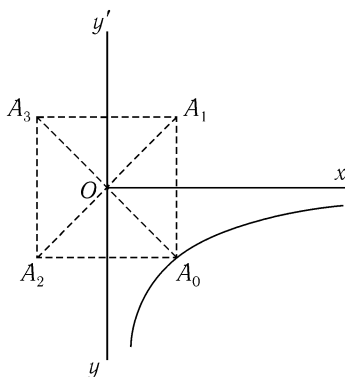


Рис. 26

86. Жидкость, заключенная между двумя прямоугольными плоскостями. Введем две плоскости xz и yz , ограничивающие жидкость. Пусть Ox и Oy — их следы, а A_0 — след бесконечно тонкой вихревой трубки с моментом 2π (рис. 26).

Пусть A_1 и A_2 — точки, симметричные A_0 относительно осей Ox и Oy , а A_3 — точка, симметричная A_1 относительно Oy , A_2 относительно Ox и A_0 относительно начала координат.

Припишем моменты:

$$\begin{aligned} +2\pi & \text{ точке } A_0, \\ -2\pi & \text{ точке } A_1, \\ -2\pi & \text{ точке } A_2, \\ +2\pi & \text{ точке } A_3. \end{aligned}$$

Уберем перегородки и рассмотрим четыре трубки A_0 , A_1 , A_2 и A_3 . Оси Ox и Oy будут линиями тока, так как трубки сопряжены по две относительно этих осей. Следовательно, введение перегородок в плоскости xz и yz не изменит движения.

Какой будет траектория точки A_0 ? В п. 72 была найдена функция P , которая в случае бесконечной жидкости пропорциональна живой силе. В отсутствии перегородок в системе из четырех трубок полная живая сила жидкости равна P с точностью до постоянного множителя.

Живая сила жидкости, заключенной между двумя плоскостями, является четвертой частью полной живой силы, которая получится при упразднении перегородок и заданная реальным существованием в трубах A_1, A_2, A_3 .

Таким образом, живая сила *реальной* жидкости, заключенной между двумя плоскостями, снова пропорциональна P и уравнение живых сил записывается в виде:

$$P = \text{const.}$$

Как было показано выше,

$$P = \sum m_i m_k \log \rho_{ik}.$$

В данном случае $m_i = \pm 1$ и существует шесть членов, соответствующие шести расстояниям ρ , которые являются попарно равными. Для членов, которые соответствуют двум противоположащим вершинам четырехугольника, произведение $m_i m_k = +1$; для четырех других членов $m_i m_k = -1$. Таким образом,

$$P = 2 \log A_0 A_3 - 2 \log A_1 A_0 - 2 \log A_2 A_0 = \text{const},$$

$$A_0 A_3 = 2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad A_1 A_0 = 2y, \quad A_2 A_0 = 2x.$$

Уравнение траектории точки A_0 имеет вид

$$2 \log 2\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \log 4xy = \text{const}$$

или

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} = \text{const},$$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \text{const}.$$

Итак, траектория точки A_0 в рассматриваемом движении будет представлена полученной кривой, асимптотичной двум осям¹.

¹Более точно полученная кривая $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = C$ асимптотична прямым $x = \frac{1}{\sqrt{C}}$

и $y = \frac{1}{\sqrt{C}}$. — *Прим. ред.*

ГЛАВА 6

Метод конформного отображения

87. Определение конформного отображения. Пусть существуют две плоские односвязные площади и точки $M(x, y)$ и $M'(x', y')$ на этих площадях. Предположим, что между M и M' установлено соответствие, такое что x' и y' являются функциями от x и y , т.е. каждой точке M соответствует только одна точка M' , и наоборот. Если x' и y' — непрерывные функции от x и y , то при перемещении точки M точка M' будет описывать кривую, и наоборот. Различным точкам границы первой площади будут соответствовать различные точки границы второй площади. Выбирая надлежащим образом функции x' и y' , можно добиться сохранения углов, т.е. образы кривых будут пересекаться под тем же углом, что и сами кривые. О таком отображении также говорится, что оно является конформным.

В случае конформного отображения бесконечно малый треугольник и его образ подобны. Следовательно, и любая бесконечно малая фигура так же подобна своему образу, поскольку ее можно разложить на попарно подобные треугольники.

88. Рассмотрим комплексную переменную $x' + \sqrt{-1}y'$. Если $x' + \sqrt{-1}y'$ является функцией от $x + \sqrt{-1}y$, то углы сохраняются, и наоборот. Действительно, условия, выражающие этот факт, представимы в виде

$$\begin{aligned}\frac{dx'}{dx} &= \frac{dy'}{dy}, \\ \frac{dx'}{dy} &= -\frac{dy'}{dx}.\end{aligned}\tag{1}$$

Можно ли таким способом конформно отобразить кривую на себя?

Рассмотрим для примера некоторую окружность.

1° Этой окружности можно придать вращение вокруг ее центра;

2° Рассмотрим точку M внутри окружности. Пусть (x, y) — координаты этой точки. Этой точке поставим в соответствие точку $M'(x', y')$, также находящуюся внутри окружности, при помощи

конформного отображения, при котором центру O соответствует некоторая точка O' внутри окружности.

Примем радиус данной окружности за единицу. Аффикс точки M представлен комплексной величиной $x + \sqrt{-1}y$, и уравнение окружности выражается в виде

$$|x + \sqrt{-1}y| = \text{const} = 1.$$

Пусть $a + \sqrt{-1}b$ — аффикс точки O' . Рассмотрим выражение

$$x' + \sqrt{-1}y' = \frac{\alpha(x + \sqrt{-1}y) + \beta}{\gamma(x + \sqrt{-1}y) + \delta}.$$

Выберем $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ таким образом, чтобы M' описывала окружность одновременно с M , т. е. что модуль $x' + \sqrt{-1}y'$ был равен единице вместе с модулем $x + \sqrt{-1}y$.

Аффикс точки O'' , сопряженной с точкой O' , имеет вид $\frac{1}{a - \sqrt{-1}b}$.

Пусть

$$x' + \sqrt{-1}y' = \frac{x + \sqrt{-1}y - (a + \sqrt{-1}b)}{x + \sqrt{-1}y - \frac{1}{a - \sqrt{-1}b}} \frac{1}{a - \sqrt{-1}b}.$$

Условие

$$|x + \sqrt{-1}y| = 1$$

равносильно следующему

$$x^2 + y^2 = 1,$$

или

$$\frac{1}{x - \sqrt{-1}y} = x + \sqrt{-1}y.$$

Таким образом, для точек окружности (x, y) получим следующие формулы

$$x' + \sqrt{-1}y' = \frac{x + \sqrt{-1}y - (a + \sqrt{-1}b)}{\frac{1}{x - \sqrt{-1}y} - \frac{1}{a - \sqrt{-1}b}} \frac{1}{a - \sqrt{-1}b}$$

или

$$x' + \sqrt{-1}y' = \frac{x + \sqrt{-1}y - (a + \sqrt{-1}b)}{x - \sqrt{-1}y - (a - \sqrt{-1}b)} (x - \sqrt{-1}y) \frac{a + \sqrt{-1}b}{a - \sqrt{-1}b}.$$

Модуль двух дробей равен единице, так как оба их числителя и знаменателя сопряжены. Модуль $x - \sqrt{-1}y$ равен единице, следовательно, модуль $x' + \sqrt{-1}y'$ также равен единице.

Если

$$x + \sqrt{-1}y = a + \sqrt{-1}b,$$

то получаем

$$x' + \sqrt{-1}y' = 0,$$

так что точка O является образом произвольно выбранной внутри окружности точки O' .

89. Шварц предложил способ конформного отображения произвольной плоской площади на окружность. Однако процедура является довольно запутанной за исключением некоторых случаев.

Предположим, что мы можем произвести конформное отображение площади A на окружность таким образом, чтобы точка M площади A соответствовала точке M' окружности, а точка R_0 площади A — центру окружности. Покажем, что можно найти другое отображение площади A на ту же окружность, такое, что другая точка P площади A будет соответствовать центру окружности. Действительно, пусть P' — точка окружности, соответствующая точке P в первом отображении. Отобразим конформно окружность саму на себя так, что точке M' соответствует точка M'' , а точке P' соответствует центр окружности. Такое отображение всегда можно произвести (см. п. 88).

Таким образом получим конформное отображение площади A . Действительно, пусть (x, y) , (x', y') и (x'', y'') являются координатами точек M , M' и M'' , x'' и y'' являются функциями от (x', y') и, следовательно, функциями от (x, y) , поскольку x' и y' являются функциями от x и y . С другой стороны, так как оба последовательно произведенных отображения являются конформными, то общее отображение сохраняет углы. Наконец, если точка M совпадает с P , то точка M' переходит в P' , а точка M'' в центр окружности.

90. Задача Гельмгольца. Предположим, что сечение сосуда представляет собой кривую C . Пусть A_0 — след вихревой трубки с моментом, равным 2π . Как мы уже установили в п. 60,

$$v + \sqrt{-1}u$$

является функцией от $x + \sqrt{-1}y$.

Таким образом, положим

$$v + \sqrt{-1}u = \frac{d(\psi + \sqrt{-1}\varphi)}{d(x + \sqrt{-1}y)}, \quad (2)$$

откуда

$$u = -\frac{d\psi}{dy} = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\varphi}{dy}. \quad (3)$$

Пусть существует равенство

$$x' + \sqrt{-1}y' = e^{\psi + \sqrt{-1}\varphi}.$$

Это выражение будет функцией от $x + \sqrt{-1}y$. Функции u и v ведут себя регулярно внутри кривой C , за исключением точки A_0 , где u и v являются бесконечно большими первого порядка.

Добавим, что разность

$$v + \sqrt{-1}u - \frac{1}{x + \sqrt{-1}y}$$

остается конечной¹. Функция

$$\psi + \sqrt{-1}\varphi - \log(x + \sqrt{-1}y) = f_1(x + \sqrt{-1}y)$$

также остается конечной, даже в точке A_0 . Следовательно, выражение

$$e^{\psi + \sqrt{-1}\varphi} = (x + \sqrt{-1}y)e^{f_1}$$

не имеет сингулярной точки, поскольку два множителя ведут себя регулярно в точке A_0 . Вдоль кривой C , которая является линией тока, $\psi = \text{const}$. Поскольку e^{ψ} является модулем $e^{\psi + \sqrt{-1}\varphi}$ или $x' + \sqrt{-1}y'$, следовательно, вдоль кривой C модуль $x' + \sqrt{-1}y'$ постоянен:

$$x'^2 + y'^2 = \text{const}. \quad (I)$$

Рассмотрим точку $M(x, y)$ внутри кривой C . При ее прохождении через всю площадь, ограниченную кривой C , точка (x', y') пересечет площадь, ограниченную кривой, соответствующей C . Согласно уравнению (I), эта кривая является окружностью, центр которой соответствует точке A_0 . Отображение является конформным, так как $x' + \sqrt{-1}y'$ является функцией от $x + \sqrt{-1}y$.

¹Точке A_0 здесь, по-видимому, соответствует начало координат. — Прим. ред.

91. Зная конформное отображение площади C , можно найти решение задачи Гельмгольца, и наоборот. Зная $x' + \sqrt{-1}y'$, получим

$$e^{\psi + \sqrt{-1}\varphi} = x' + \sqrt{-1}y',$$

$$v = \frac{d\psi}{dx}, \quad u = -\frac{d\psi}{dy}.$$

Здесь φ — функция скоростей (вне трубки A_0).

92. Для определения траектории центра тяжести трубки A_0 будет более удобным прибегнуть к электростатическому сравнению.

Рассмотрим электрическое поле, определенное некоторым числом равномерно наэлектризованных прямых, перпендикулярных плоскости xy , длиной $2l$, очень большой по сравнению с их расстояниями. Пусть концы всех прямых находятся в двух плоскостях $z = l$ и $z = -l$.

Пусть AB — одна из этих прямых (рис. 27); P — некоторая точка на этой прямой с координатами x', y', z' , а P' — бесконечно близкая к ней точка, координаты которой — $x', y', z' + dz'$.

Если через δ обозначим заряд на единице длины, то зарядом PP' будет $\delta dz'$ и потенциал прямой AB в точке $M(x, y, z)$ будет иметь вид

$$V = \int_{-l}^{+l} \frac{\delta dz'}{MP}.$$

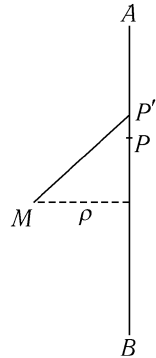


Рис. 27

Пусть ρ — расстояние от точки M до прямой, так что

$$\overline{MP}^2 = \rho^2 + (z - z')^2,$$

тогда потенциал будет выражаться в следующем виде

$$V = \int_{-l}^{+l} \frac{\delta dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}}.$$

Положим

$$z' = \zeta + z, \quad \alpha = l - z, \quad \beta = l + z,$$

тогда

$$V = \int_{-\beta}^{\alpha} \frac{\delta d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}},$$

$$V = \delta \log \frac{\alpha + \sqrt{\rho^2 + \alpha^2}}{-\beta + \sqrt{\rho^2 + \beta^2}} = \delta \log \frac{(\alpha + \sqrt{\rho^2 + \alpha^2})(\beta + \sqrt{\rho^2 + \beta^2})}{\rho^2}.$$

Поскольку α и β очень большие по сравнению с ρ , то получим следующее приближительное значение потенциала

$$V = \delta \log \frac{4\alpha\beta}{\rho^2} = 2\delta \log \frac{2\sqrt{l^2 - z^2}}{\rho}.$$

93. Если существует некоторое количество наэлектризованных прямых, то

$$V = \sum 2\delta_i \log \frac{2\sqrt{l^2 - z^2}}{\rho_i}$$

или

$$V = -2 \sum \delta_i \log \rho_i + 2 \log 2\sqrt{l^2 - z^2} \sum \delta_i. \quad (4)$$

Если сумма зарядов равна нулю

$$\sum \delta_i = 0,$$

то потенциал

$$V = -2 \sum \delta_i \log \rho_i \quad (5)$$

не зависит ни от l , ни от z .

Составляющая электростатической силы, параллельная Oz , как и $\frac{dV}{dz}$, равна нулю.

94. Применение к гидродинамике. Пусть C — сечение сосуда, Ω — сечение вихревой трубки (рис. 28). Вихрь ζ изменяется некоторым образом внутри сечения Ω и равен нулю вне этого сечения. Пусть 2π — полный момент трубки:

$$\int 2\zeta d\omega = 2\pi. \quad (6)$$

Необходимо, чтобы выполнялось два уравнения: уравнение неразрывности

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0 \quad (7)$$

и уравнение

$$\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = 2\zeta. \quad (8)$$

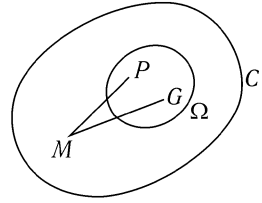


Рис. 28

Соотношение (1) выражает, что u и v являются производными одной и той же функции $\psi(x, y)$

$$u = -\frac{d\psi}{dy}, \quad v = \frac{d\psi}{dx},$$

$$v dx - u dy = d\psi.$$

Подставляя значения u и v в выражение (2), получим

$$\Delta\psi = 2\zeta.$$

Таким образом, вне сечения Ω

$$\Delta\psi = 0,$$

и существует функция скоростей. Кривая C должна быть линией тока, т.е. вдоль этой линии должно выполняться равенство

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

или

$$\frac{d\psi}{dx} dx + \frac{d\psi}{dy} dy = d\psi = 0.$$

Следовательно, вдоль C

$$\psi = \text{const.}$$

Поскольку ψ определена только через свои производные, то необходимо, чтобы эта постоянная всегда равнялась нулю.

95. Теперь заменим в трубке Ω каждую бесконечно тонкую трубку на наэлектризованную прямую длиной $2l$, плотность заряда на которой пропорциональна ζ . Предположим, что пространство, заключенное между Ω и C , заполнено диэлектриком, а вне C — цилиндрическим проводником с контуром C в качестве основания. Если этот проводник заземлен, то его потенциал ψ равен нулю, и по всей длине C получим $\psi = 0$.

Однако по C распределяется электрический заряд, равный заряду на Ω , но противоположный по знаку (теорема Фарадея). Надлежащим выбором коэффициента пропорциональности, связывающего плотность заряда с ζ , потенциал можно представить функцией ψ , которая была определена в п. 94.

Внутри контура C в диэлектрике справедливо равенство

$$\Delta\psi = 0.$$

Внутри цилиндра Ω имеем

$$\Delta\psi = -4\pi\mu''.$$

Таким образом, достаточно принять

$$\mu'' = -\frac{\zeta}{2\pi} \quad (9)$$

или

$$\int \mu'' d\omega = -\frac{1}{2}.$$

Тогда функция ψ будет удовлетворять тем же условиям, что и функция ψ , определенная в задаче Гельмгольца. Функция ψ зависит только от x и y , а сумма зарядов равна нулю, так как заряды цилиндров C и Ω равны и имеют противоположные знаки.

В точке поверхности цилиндра C поверхностная плотность заряда μ' будет такой, что

$$\int \mu' ds = \frac{1}{2},$$

где s — дуга кривой C .

Следовательно, потенциал выражается в виде

$$\psi = -2 \int \mu' ds \log \rho - 2 \int \mu'' d\omega \log \rho = \psi' + \psi'' \quad (10)$$

(через ψ' обозначим первый интеграл, а через ψ'' — второй).

Заметим, что ψ' не является потенциалом, возникшим только в цилиндре C , а ψ'' — только в цилиндре Ω , так как сумма зарядов в этих цилиндрах, рассматриваемых по отдельности, больше не равны нулю.

Выражение потенциала в цилиндре C будет следующим (п. 93)

$$-2 \int \mu' ds \log \rho + 2 \log 2 \sqrt{l^2 - z^2} \int \mu' ds,$$

или

$$-\psi' + \log 2 \sqrt{l^2 - z^2},$$

а в Ω

$$\psi'' - \log 2 \sqrt{l^2 - z^2}.$$

Здесь было использовано, что $\int \mu' ds = +\frac{1}{2}$ и $\int \mu'' d\omega = -\frac{1}{2}$.

Составляющие электростатической силы имеют вид

$$v = \frac{d\psi}{dx}, \quad u = -\frac{d\psi}{dy}.$$

Необходимо совершить вращение на 90° для того, чтобы получить составляющие скорости, которые примут следующие значения

$$u = -\frac{d\psi'}{dy} - \frac{d\psi''}{dy}, \quad v = \frac{d\psi'}{dx} + \frac{d\psi''}{dx}. \quad (11)$$

96. Предположим, что трубка является бесконечно тонкой, ее след сокращается в точку G , а момент остается равным 2π .

Весь заряд будет сосредоточен на прямой G , перпендикулярной плоскости xy . Вблизи этой прямой электрическая сила и, следовательно, скорость будут бесконечно большими. Таким образом, выражение ψ'' будет иметь вид

$$\psi'' = -2 \log \rho_0 \int \mu'' d\omega = \log \rho_0,$$

где ρ_0 — расстояние от точки M до прямой, проведенной из центра тяжести трубки параллельно оси z .

Действительно, с точностью до бесконечно малых высокого порядка, ρ равняется ρ_0 [MP равняется MG (рис. 28)]. Если рассматриваемая

точка M бесконечно приближается к G , то ρ_0 стремится к 0 и ψ'' становится бесконечно большой. Напротив, ψ' остается конечной, поскольку ρ остается конечной, даже если точка M бесконечно приближается к G .

Следовательно, u и v бесконечно растут, хотя их первые члены $\frac{d\psi'}{dy}$ и $\frac{d\psi'}{dx}$ остаются конечными, иначе говоря, функции

$$u + \frac{d \log \rho_0}{dy}, \quad v - \frac{d \log \rho_0}{dx}$$

остаются конечными, даже в точке G .

Таким образом, функция ψ должна удовлетворять следующим условиям:

Функция должна быть конечной и непрерывной также, как и ее производные на всей площади ограниченной кривой C , кроме точки G ; в каждой точке этой площади она должна удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\psi = 0$ и быть равной нулю в каждой точке контура C . Наконец, функции

$$u + \frac{d \log \rho_0}{dy}, \quad v - \frac{d \log \rho_0}{dx}$$

должны оставаться конечными вблизи G .

Поставленная таким образом задача допускает только одно решение. Это решение будем называть конформным отображением.

97. Действительно, допустим, что нами получено конформное отображение площади C на поверхность, ограниченную окружностью единичного радиуса с центром в начале координат. Предположим, что точка G соответствует центру окружности. Точке $M(x, y)$ площади C соответствует точка $M'(x', y')$ внутри окружности, а $x' + \sqrt{-1}y'$ является функцией от $x + \sqrt{-1}y$. Положим

$$\log(x' + \sqrt{-1}y') = \psi + \sqrt{-1}\varphi.$$

Покажем, что функция

$$\psi = \log \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

удовлетворяет всем требуемым условиям.

Действительно,

$$\Delta\psi = 0,$$

т. к. ψ является вещественной частью аналитической функции.

Отметим, что вдоль всего контура C справедливо равенство $\psi = 0$, так как отображение контура C является окружностью:

$$x'^2 + y'^2 = 1.$$

Выражение $\psi - \log \rho_0$ остается конечным. Оно могло бы быть бесконечным только в точке G , соответствующей точке O , для которой

$$x'^2 + y'^2 = 0.$$

Пусть x_0, y_0 — координаты точки G , так что

$$\rho_0 = |(x + \sqrt{-1}y) - (x_0 + \sqrt{-1}y_0)|.$$

При этом

$$\psi - \log \rho_0 = \text{вещественной части } \log \frac{x' + \sqrt{-1}y'}{x + \sqrt{-1}y - (x_0 + \sqrt{-1}y_0)},$$

где при $x + \sqrt{-1}y = x_0 + \sqrt{-1}y_0$ выражение $x' + \sqrt{-1}y'$ обнуляется и становится простым нулем. Итак, величина под знаком логарифма в точке G больше не обнуляется.

98. Скорость точки G . Скорость точки G определяется уравнением (1) п. 65:

$$\frac{dx_0}{dt} \int \zeta d\omega = \int u \zeta d\omega,$$

или

$$\frac{dx_0}{dt} \int \zeta d\omega = - \int \frac{d\psi'}{dy} \zeta d\omega - \int \frac{d\psi''}{dy} \zeta d\omega.$$

Покажем, что интеграл $\int \frac{d\psi''}{dy} \zeta d\omega = 0$. Действительно, если бы перегородки C не существовало, то составляющие скорости выражались бы следующими соотношениями

$$u = -\frac{d\psi'}{dy}, \quad v = \frac{d\psi''}{dz}.$$

Однако в этом случае центр тяжести G вихревой трубки неподвижен:

$$\frac{dx_0}{dt} = - \frac{\int \frac{d\psi''}{dy} \zeta d\omega}{\int \zeta d\omega} = 0,$$

откуда

$$\int \frac{d\psi''}{dy} \zeta d\omega = 0.$$

Следовательно, остается

$$\frac{dx_0}{dt} \int \zeta d\omega = - \int \frac{d\psi'}{dy} \zeta d\omega,$$

здесь $\frac{dx_0}{dt}$ будет одним из значений, которое принимает отношение $-\frac{d\psi'}{dy}$ внутри сечения Ω вихревой трубки. Если трубка бесконечно тонкая, то это значение мало отличается от того, которое принимает функция в точке G .

Таким образом, для того чтобы вычислить $\frac{dx_0}{dt}$, примем производную $-\frac{d\psi'}{dy}$ и заменим x и y на координаты точки G x_0, y_0 . Вычислим таким же образом $\frac{dy_0}{dt} = \left(\frac{d\psi'}{dx} \right)_0$.

99. Электростатическая аналогия. Рассмотрим точку M на плоскости xy . Вследствие симметрии (поскольку концы электрических прямых полагаются в плоскостях $z = \pm l$, находящихся на равных расстояниях от плоскости xy), электрическая сила, действующая в точке M , будет располагаться в этой плоскости. Ее составляющие выражаются через $\frac{d\psi}{dx}, \frac{d\psi}{dy}$. Сила порождается зарядом цилиндра Ω и поверхностью C . Следовательно, ее можно рассматривать как равнодействующую двух сил. Первая вызвана зарядом на поверхности C , и ее компоненты равны

$$\frac{d\psi'}{dx}, \quad \frac{d\psi'}{dy}, \quad \frac{d \log 2\sqrt{l^2 - z^2}}{dz}.$$

Если точка M находится на плоскости xy , то третья компонента становится равной нулю. Вторая сила, вызванная Ω , имеет следующие компоненты

$$\frac{d\psi''}{dx}, \quad \frac{d\psi''}{dy}, \quad -\frac{d \log 2\sqrt{t^2 - z^2}}{dz}.$$

Второй член потенциала цилиндра Ω не зависит ни от x , ни от y .

В плоскости xy третья компонента также становится равной нулю, и мы получаем две силы, компоненты которых

$$\begin{aligned} \frac{d\psi'}{dx}, \quad \frac{d\psi'}{dy}, \quad 0; \\ \frac{d\psi''}{dx}, \quad \frac{d\psi''}{dy}, \quad 0. \end{aligned}$$

Вблизи точки G компоненты второй силы становятся очень большими. Первая при этом остается конечной и, согласно предыдущему параграфу, поворачивая ее на 90° , получим скорость точки G .

100. Траектория точки G . Для того чтобы найти эту траекторию, или скорее, одно из ее главных свойств, поскольку не всегда возможно получить ее уравнение в конечной форме, удобно вновь прибегнуть к электростатическому сравнению.

101. Сначала напомним некоторые теоремы электростатики, которыми мы впоследствии воспользуемся.

Теорема 1. Пусть существует электрическое поле, и в нем находятся проводники с зарядами $M_1, M_2, \dots, M_n$. Значения потенциала в точках нахождения зарядов $V_1, V_2, \dots, V_n$. Если поле претерпевает изменения, то работа, произведенная электрическими силами, равняется приращению суммы

$$\frac{1}{2}(M_1V_1 + M_2V_2 + \dots + M_nV_n) = \frac{1}{2} \sum MV.$$

Теорема 2. Пусть две системы проводников S и S' действуют друг на друга (здесь не учитываем силы, с которыми проводники одной системы действуют на проводники этой же системы).

Для простоты формулировки предположим, что проводники очень малы и уподобляются точкам. Если бы это было не так, то было бы необходимо разложить каждый проводник на бесконечно малые элементы.

Пусть $M_1, M_2, \dots, M_n$ — электрические заряды проводников, составляющих систему S , $V'_1, V'_2, \dots, V'_n$ — потенциалы, порожденные системой S' в точках, где находятся эти заряды. Пусть $M'_1, M'_2, \dots, M'_n$ — заряды в системе S' и $V_1, V_2, \dots, V_n$ — потенциалы, порожденные системой S в точках расположения этих зарядов.

Работа сил при действии системы S на систему S' , увеличенная на работу сил при действии S' на S , равняется приращению функции

$$M_1 V'_1 + M_2 V'_2 + \dots + M_n V'_n + M'_1 V_1 + \dots + M'_n V_n$$

или

$$\sum M V' + \sum M' V.$$

Если имеется бесконечное число электрических масс, то теоремы также верны. Однако в формулах суммы $\sum$ необходимо заменить на интегралы $\int$.

102. Применим эти теоремы при рассмотрении электрического поля, определенного нами в п. 95.

Силы, действующие в этом поле, образуют четыре группы:

Заряды μ'' взаимодействуют друг с другом с силами F_1 ; заряды μ' действуют на заряды μ'' посредством сил F_2 ; заряды μ'' действуют на μ' посредством сил F'_2 и, наконец, заряды μ' взаимодействуют между собой с силами F_3 .

Разложим цилиндр Ω на бесконечно малые элементы следующим образом. Разобьем цилиндр Ω на бесконечно тонкие цилиндры сечением $d\omega$, параллельные Oz , а затем рассечем эти цилиндры плоскостями, параллельными плоскости xy . Объем каждого элемента получится равным $d\omega dz$, а его заряд — $\mu'' d\omega dz$.

Компоненты силы F_2 , относящиеся к этому элементу, будут иметь вид

$$\mu'' d\omega dz \frac{d\psi'}{dx}, \quad \mu'' d\omega dz \frac{d\psi'}{dy}, \quad \mu'' d\omega dz \frac{d \log 2\sqrt{l^2 - z^2}}{dz}.$$

Заметим, что сечение цилиндра Ω полагалось очень маленьким и внутри этого сечения $\frac{d\psi'}{dx}$ и $\frac{d\psi'}{dy}$ имеют постоянное значение. Точка приложения равнодействующей сил F_2 находится внутри Ω : таким образом, она находится очень близко к прямой, проведенной через точку G

параллельно оси Oz . Обозначая через ℓ полный заряд Ω , который полагается сосредоточенным на этой прямой, получим равнодействующую сил F_2 со следующими компонентами

$$-\ell \frac{d\psi'}{dx}, \quad -\ell \frac{d\psi'}{dy}, \quad 0.$$

103. Оценим работу этих сил и начнем с полной работы четырех видов электростатических сил F_1 , F_2 , F_2' и F_3 .

Как мы уже напомним, работа электростатических сил представлена приращением интеграла

$$\frac{1}{2} \int V \, dm,$$

где V — потенциал, в котором находится бесконечно малый заряд dm , интеграл взят по всем массам. В рассматриваемом нами случае полный потенциал равен ψ . Следовательно, искомая работа равняется приращению суммы

$$\frac{1}{2} \int \psi \mu'' \, d\omega \, dz + \frac{1}{2} \int \psi \mu' \, ds \, dz,$$

где $d\omega$ является сечением одного из элементарных цилиндров, полученных разложением Ω ; а ds — элемент контура C такой, что поверхность C разбивается на прямоугольники площадью $ds \, dz$.

Заметим, что ψ , μ' и μ'' не зависят от z и что необходимо проинтегрировать в пределах от $z = -l$ до $z = +l$. Тогда это выражение примет следующий вид

$$l \int \psi \mu'' \, d\omega + l \int \psi \mu' \, ds.$$

Положим

$$P = \int \psi \mu'' \, d\omega + \int \psi \mu' \, ds.$$

Работа электростатических сил представлена выражением

$$d\mathcal{E} = l \, dP.$$

104. Выполним аналогичные вычисления для сил F_1 . Заряд одного маленького цилиндра равен $\mu'' \, d\omega \, dz$, а его потенциал —

$$\psi'' - \log 2 \sqrt{l^2 - z^2},$$

следовательно, получаем

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} &= \frac{1}{2}d \int [\psi'' - \log 2\sqrt{l^2 - z^2}] \mu'' d\omega dz = \\ &= \frac{1}{2}d \int \psi'' \mu'' d\omega dz - \frac{1}{2}d \int \mu'' d\omega \log 2\sqrt{l^2 - z^2} dz = \\ &= ld \int \psi'' \mu'' d\omega - \frac{1}{2}d \int \mu'' d\omega \int_{-l}^{+l} \log 2\sqrt{l^2 - z^2} dz, \end{aligned}$$

поскольку μ'' не зависит от z . Два последних интеграла постоянны. Тогда, полагая

$$P' = \int \psi'' \mu'' d\omega,$$

получим выражение для работы сил F_1 :

$$ldP'.$$

Работа других сил F_2 , F_2' и F_3 будет представлена разностью

$$ld(P - P').$$

Таким образом,

$$P - P' = \int \psi' \mu'' d\omega + \int \psi \mu' ds,$$

где ψ представляет собой потенциал в точках на контуре C . Этот потенциал равняется нулю, поскольку цилиндр C заземлен: следовательно, второй интеграл также равен нулю. Первый интеграл должен быть взят по всей площади Ω . Так как эта площадь бесконечно мала, то ψ' имеет почти постоянное значение на всей своей протяженности, равное значению в точке G , ψ'_0 . Таким образом, можем записать

$$P - P' = \psi'_0 \int \mu'' d\omega = -\frac{1}{2}\psi'_0.$$

105. Предположим, что трубка перемещается. Скорость ее центра тяжести выражается следующими составляющими

$$\frac{dx_0}{dt} = -\left(\frac{d\psi'}{dy}\right)_0, \quad \frac{dy_0}{dt} = \left(\frac{d\psi'}{dx}\right)_0.$$

Выражением $\left(\frac{d\psi'}{dy}\right)_0$ обозначается значение, которое принимает $\left(\frac{d\psi'}{dy}\right)$, когда x и y заменяются на координаты x_0 , y_0 точки G .

Массы μ'' перемещаются и при этом задают распределение заряда по поверхности C .

В плоскости xy составляющие силы F_2 имеют вид

$$\frac{d\psi'}{dx}, \quad \frac{d\psi'}{dy}.$$

Следовательно, равнодействующая сил F_2 нормальна к траектории точки G и не производит никакой работы. То же самое получим в случае с силами F'_2 и F_3 . Действительно, равнодействующая этих сил нормальна к проводнику C (поскольку в электростатике силовые линии всегда нормальны к проводникам), массы μ' перемещаются, *оставаясь при этом на поверхности проводника* и, следовательно, перпендикулярны направлению силы. Таким образом, эти силы не производят работы.

Полная работа сил F_2 , F'_2 и F_3 равна нулю.

Из чего следует, что

$$d(P - P') = 0,$$

или

$$P - P' = \text{const},$$

и, наконец,

$$\psi'_0 = \text{const}.$$

106. Траектория является замкнутой кривой. Предположим, что было произведено конформное отображение площади C на окружность K с центром в точке O (рис. 29). Точке $G(x_0, y_0)$ соответствует точка $G'(x'_0, y'_0)$, а точке $M(x, y)$ — точка $M'(x', y')$. Положим

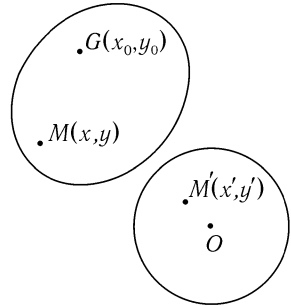


Рис. 29

$$x' + \sqrt{-1}y' = Z', \quad x + \sqrt{-1}y = Z,$$

$$x'_0 + \sqrt{-1}y'_0 = Z'_0, \quad x_0 + \sqrt{-1}y_0 = Z_0,$$

Z' является некоторой функцией от $f(Z)$, а Z'_0 — та же функция от Z_0 .

Положим также

$$x'_0 - \sqrt{-1}y'_0 = U'_0.$$

Для того чтобы можно было применить формулы, необходимо найти другое конформное отображение такое, при котором точке G соответствует точка O , а точке M — точка $M''(x'', y'')$ так, что

$$x'' + \sqrt{-1}y'' = Z'' = \varphi(Z).$$

При смещении точки G , вид функции φ будет изменяться, а вид функции f останется тем же, поскольку в определении функции f точка G не играет никакой роли.

Как было показано в п. 88, достаточно принять

$$Z'' = \frac{Z' - Z'_0}{Z'U'_0 - 1}.$$

Действительно, если $\text{mod } Z' = 1$, то $\text{mod } Z'' = 1$.

Если $Z = Z_0$, то $Z' = Z'_0$ и $Z''_0 = 0$, т.е. точке G соответствует только точка O .

Функция Z'' является функцией от x и y :

$$Z'' = e^{\psi + \sqrt{-1}\varphi},$$

$$\psi = \text{вещественная часть } \log Z'' = \log |Z''|,$$

$$\psi'' = \log \rho_0,$$

полагая

$$\rho_0 = MG = |Z - Z_0|,$$

$$\psi' = \log \left| \frac{Z''}{Z - Z_0} \right| = \log \left| \frac{Z' - Z'_0}{Z - Z_0} \right| - \log |Z'U'_0 - 1|.$$

Пусть ψ'_0 является значением этого выражения для $Z = Z_0$. Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\begin{aligned} \psi'_0 &= \log \left| \frac{dZ'_0}{dZ_0} \right| - \log |Z'U'_0 - 1| = \\ &= \log \left| \frac{dZ'_0}{dZ_0} \right| - \log [1 - |Z'_0|^2]. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение $\psi'_0 = \text{const}$ можно записать в виде

$$\frac{\left| \frac{dZ'_0}{dZ_0} \right|}{1 - |Z'_0|^2} = \text{const}.$$

Итак, траектория всегда будет представлять собой замкнутую кривую.

ГЛАВА 7

Движение вихревых трубок. Основные теоремы. Трубки вращения¹

107. Вихревые трубки вращения. Предположим, что в бесконечной жидкости существуют вихревые трубки с вращательной симметрией относительно оси z . Если в начальный момент времени это условие выполнено, то оно будет выполнено всегда. Плоскость, проходящая через ось z , будет плоскостью симметрии.

Пусть M — некоторая точка жидкости. Проведем меридианную плоскость, проходящую через эту точку (рис. 30), и рассмотрим изображение системы в этой плоскости. При преобразовании симметрии скорость точки M не должна изменяться. Вследствие этого она постоянно находится в этой меридианной плоскости.

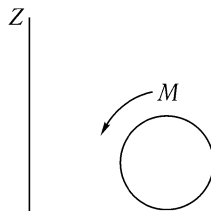


Рис. 30

108. Рассмотрим бесконечно тонкую трубку, образующую нечто вроде тора (рис. 31). Пусть $d\omega$ — его перпендикулярное сечение, R — расстояние от центра масс этого сечения до оси Oz . Объем трубки

$$2\pi R d\omega$$

должен оставаться постоянным. Вихрь σ перпендикулярен меридианной плоскости, и момент трубки имеет значение

$$2\sigma d\omega,$$

постоянное по всей длине трубки. Поскольку $d\omega$ — постоянно, необходимо, чтобы σ также было постоянным и зависело только от z и от R . Полагая:

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = z,$$

¹ В настоящее время принято название «вихревые кольца». — *Прим. ред.*

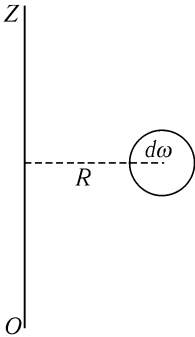


Рис. 31

получим

$$\sigma = f(R, z).$$

С другой стороны, момент трубки должен оставаться неизменным во времени. Следовательно, то же самое будет справедливо для $\frac{\sigma}{R}$.

109. Необходимо найти функции u, v, w , удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} 2\xi &= \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, & 2\eta &= \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \\ 2\zeta &= \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}, & \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Эти уравнения имеют тот же вид, что и уравнения Максвелла. Если заменить вихревые трубки на токи с составляющими $\frac{\xi}{2\pi}, \frac{\eta}{2\pi}, \frac{\zeta}{2\pi}$, то функции u, v, w будут составляющими магнитного поля, определенного этими токами.

Максвелл ввел так называемый векторный потенциал, компоненты F, G, H которого определены условиями

$$u = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \text{ и т. д.} \quad (2)$$

и который удовлетворяет условию

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0.$$

Подставляя u, v, w в (1), находим¹

$$\Delta F + 4\pi u = 0$$

или

$$\Delta F + 4\pi \frac{\xi}{2\pi} = 0.$$

Следовательно, F является потенциалом притягивающей материи, плотность которой равна $\frac{\xi}{2\pi}$. Пусть x, y, z — координаты точки поля,

¹ Данное уравнение записано в обозначениях п. 43. Под u понимается составляющая электрического тока. — Прим. ред.

x', y', z' — координаты центра масс элемента объема $\partial\tau$; ξ', η', ζ' — значения ξ, η, ζ в этой точке, а r — расстояние между точками с координатами x, y, z и x', y', z' . Исходя из этого, получим следующие соотношения

$$F = \int \frac{\xi d\tau}{2\pi r}, \quad G = \int \frac{\eta d\tau}{2\pi r}, \quad H = \int \frac{\zeta d\tau}{2\pi r}. \quad (2)$$

Эти формулы задают F, G, H и, следовательно, u, v, w по известным ξ, η, ζ (см. «Электричество и оптика», I, стр. 144).¹

110. Выражение живой силы жидкости. Полная живая сила жидкости выражается следующей формулой

$$T = \frac{1}{2} \int (u^2 + v^2 + w^2) d\tau, \quad (3)$$

при этом плотность жидкости полагается равной единице. В электродинамической аналогии, если среда, в которой находятся токи, не является магнитной ($\mu = 1$), то электрокинетическая энергия² будет следующей

$$\frac{1}{8\pi} \int (u^2 + v^2 + w^2) d\tau = \frac{T}{4\pi}.$$

Эта энергия может быть выражена другим способом. Действительно, рассмотрим элемент тока на одном из контуров, порождающих поле. Пусть ds — этот элемент; i — сила тока; P — проекция векторного потенциала на направление элемента ds , тогда сумма:

$$\frac{1}{2} \int i ds P,$$

взятая по всем элементам тока, представляет собой кинетическую энергию. Если следуя Максвеллу обозначим через u, v, w компоненты тока, то, как доказал Максвелл, будет справедливо следующее равенство:

$$\frac{1}{2} \int i ds P = \frac{1}{2} \int (Fu + Gv + Hw) d\tau. \quad (4)$$

(См. «Электричество и оптика», I, стр. 153.)

¹Здесь и далее А. Пуанкаре ссылается на свои лекции. В современном изложении данный материал можно найти в любом учебнике университетского курса электричества, например, Сивухин «Электричество». — *Прим. ред.*

²Энергия магнитного поля. — *Прим. ред.*

В настоящих обозначениях компоненты тока имеют вид

$$\frac{\xi}{2\pi}, \frac{\eta}{2\pi}, \frac{\zeta}{2\pi},$$

откуда

$$\frac{1}{2} \int i \, ds \, P = \frac{1}{2} \int \left(F \frac{\xi}{2\pi} + G \frac{\eta}{2\pi} + H \frac{\zeta}{2\pi} \right) d\tau = \frac{1}{4\pi} \int (F\xi + G\eta + H\zeta) d\tau$$

и

$$T = \int (F\xi + G\eta + H\zeta) d\tau. \quad (5)$$

111. Тождество двух выражений для T доказывается непосредственно. Действительно, справедливо равенство

$$\int (F\xi + G\eta + H\zeta) d\tau = \int \sum F\xi \, d\tau = \int \sum F \frac{dw}{dy} \, d\tau - \int \sum F \frac{dv}{dz} \, d\tau.$$

Заметим, что $d\tau = dx \, dy \, dz$. Проинтегрируем по частям

$$\int \sum F \frac{dw}{dy} \, dx \, dy \, dz = \int Fw \, dx \, dz - \int w \frac{dF}{dy} \, d\tau.$$

Интеграл берется от $-\infty$ до $+\infty$. В бесконечности F и w равны нулю, следовательно, подстановка первого интеграла на границах равна нулю. Таким образом, остается следующее равенство

$$\int F \frac{dw}{dy} \, d\tau = - \int w \frac{dF}{dy} \, d\tau,$$

также

$$\int F \frac{dv}{dz} \, d\tau = - \int v \frac{dF}{dz} \, d\tau,$$

и, следовательно, для T получаем следующее выражение:

$$T = -\frac{1}{2} \int \sum w \frac{dF}{dy} \, d\tau + \frac{1}{2} \int \sum v \frac{dF}{dz} \, d\tau,$$

либо, раскладывая суммы,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int d\tau \left(v \frac{dF}{dz} + w \frac{dG}{dx} + u \frac{dH}{dy} - w \frac{dF}{dy} - u \frac{dG}{dz} - v \frac{dH}{dx} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int d\tau \left[u \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) + v \left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) + w \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \right]. \end{aligned}$$

Используя уравнения (2), получим

$$T = \frac{1}{2} \int (u^2 + v^2 + w^2) d\tau.$$

112. Взаимодействия элементов тока, заменяющие вихревые трубки. Пусть элемент тока MM' длины ds и силой i расположен в магнитном поле. Пусть MT — вектор, представляющий магнитную силу в точке M . MC — касательный к MM' и пропорциональный к $i ds$ вектор. На элемент MM' , как известно, действует сила, перпендикулярная плоскости MTC и равная площади параллелограмма, построенного из MT и MC . Пусть dx, dy, dz — проекции ds на три оси, α, β, γ — проекции магнитной силы MT ; $i dx, i dy, i dz$ — проекции вектора MC . Проекции электродинамической силы на оси Ox, Oy и Oz соответственно равны

$$i dz \beta - i dy \gamma, \quad i dx \gamma - i dz \alpha, \quad i dy \alpha - i dx \beta.$$

В рассматриваемом нами случае проекциям $i dx, i dy, i dz$ соответствуют

$$\frac{\xi d\tau}{2\pi}, \quad \frac{\eta d\tau}{2\pi}, \quad \frac{\zeta d\tau}{2\pi},$$

а величины α, β, γ соответствуют u, v, w . Тогда составляющие электродинамической силы будут

$$\frac{d\tau}{2\pi}(v\zeta - w\eta) = X d\tau, \quad \frac{d\tau}{2\pi}(w\xi - u\zeta) = Y d\tau, \quad \frac{d\tau}{2\pi}(u\eta - v\xi) = Z d\tau,$$

где

$$X = \frac{1}{2\pi}(v\zeta - w\eta) \dots \text{и т. д.}$$

113. Теорема. Силы (X, Y, Z) , представляющие взаимодействия элементов воображаемых токов, которыми мы заменили наши вихревые трубки, должны быть равны и попарно противоположны. Следовательно,

сумма их проекций на некоторую ось равна нулю:

$$\sum X d\tau = 0, \quad \text{или} \quad \sum (v\zeta - w\eta) d\tau = 0. \quad (6)$$

Кроме того, сумма их моментов относительно некоторой оси также равна нулю:

$$\sum (Xy - Yx) d\tau = 0. \quad (7)$$

114. Непосредственное доказательство уравнения $\sum X d\tau = 0$. Пусть поверхность S , например, является сферой с центром в начале координат и с очень большим радиусом R . Пусть $d\omega$ — элемент этой поверхности; l, m, n — направляющие косинусы нормали к этому элементу. Покажем, что интеграл

$$\int d\omega \left[\frac{l}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - u(lu + mv + nw) \right]$$

равен нулю.

Действительно, мы предположили, что все наши вихревые трубки находятся на конечном расстоянии. Точка поверхности, расположенная на очень большом расстоянии R от начала координат также будет на очень большом расстоянии (такого же порядка, что и R) от вихревых трубок. Вектор (u, v, w) представляет скорость или магнитную силу. Известно, что эта магнитная сила изменяется обратно пропорционально R^3 . Таким образом, если мы рассматриваем R как бесконечно большую первого порядка, то u, v, w будут бесконечно малыми третьего порядка, как $\frac{1}{R^3}$, а u^2, v^2, w^2 — бесконечно малыми шестого порядка. Поверхность, по которой взят интеграл, является бесконечно большой, но только второго порядка, поэтому интеграл равен нулю.

Преобразуя этот интеграл по известной формуле

$$\int lF d\omega = \int \frac{dF}{dx} d\tau,$$

получим¹

$$\int d\tau \begin{bmatrix} u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dx} + w \frac{dw}{dx} \\ -u \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dy} - u \frac{dw}{dz} \\ -u \frac{du}{dx} - v \frac{du}{dy} - w \frac{du}{dz} \end{bmatrix} = 0.$$

Вторая строка равна нулю в силу уравнения неразрывности. Принимая во внимание уравнения (1), получим:

$$2 \int d\tau (v\zeta - w\eta) = 0,$$

¹Выражение в квадратных скобках представляет собой обыкновенную сумму входящих в него слагаемых. — *Прим. ред.*

или

$$\sum X d\tau = 0.$$

115. В теореме о моментах получим аналогичное уравнение:

$$\int (Xy - Yx) d\tau = 0,$$

или

$$\int \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} d\tau = 0. \quad (9')$$

116. Альтернативное выражение живой силы T . Для того чтобы получить это выражение, вспомним вначале следующую теорему электродинамики:

Теорема. При перемещении проводников без изменения силы тока работа электродинамических сил равна приращению электродинамической энергии.

Пусть ds — элемент тока силы i . Рассмотрим вариации δx , δy , δz координат x , y , z этого элемента:

$$\int (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) d\tau = \frac{\delta T}{4\pi}.$$

Допустим, в частности, что δx , δy , δz пропорциональны x , y , z , так что

$$\delta x = \varepsilon x, \quad \delta y = \varepsilon y, \quad \delta z = \varepsilon z,$$

где ε — бесконечно малая константа, и преобразование сводится к умножению всех расстояний на $1 + \varepsilon$. Предположим, для ясности, что существуют только два тока. В этом случае,

$$T = \frac{1}{2}(Li^2 + 2Mii' + Ni'^2),$$

$$\delta T = \frac{1}{2}(\delta Li^2 + 2\delta Mii' + \delta Ni'^2).$$

В частном преобразовании, которое мы произвели, токи остаются подобными относительно начала координат. В электромагнитной системе L , M , N — длины. В силу однородности, эти длины должны быть помножены на $1 + \varepsilon$. Следовательно,

$$\delta L = L\varepsilon, \quad \delta M = M\varepsilon, \quad \delta N = N\varepsilon$$

и, наконец,

$$\delta T = T\varepsilon.$$

Эта формула, очевидно, остается справедливой для любого, в том числе и бесконечного, числа токов. Таким образом, имеем

$$\int (Xx + Yy + Zz)\varepsilon d\tau = \frac{T\varepsilon}{4\pi},$$

сокращая ε и заменяя X, Y, Z их значениями,

$$\int \begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} d\tau = \frac{T}{2}, \quad (8)$$

или, обозначая определитель через D ,

$$\int D d\tau = \frac{T}{2}.$$

117. Жидкость, заключенная в сосуде. При рассмотрении жидкости, полностью заполняющей сосуд, можно еще раз прибегнуть к электродинамическому сравнению при условии, что сосуд будет помещен в сверхпроводник.

Максвелл доказал, что токи в таком проводнике локализованы на поверхности, и эта поверхность образует электродинамический экран (поверхностный ток). Теоремы, сформулированные ранее, будут оставаться справедливыми, при включении в рассмотрение этого поверхностного тока.

118. Рассмотрим точку поверхности сосуда. Скорость частиц жидкости, находящихся внутри сосуда, расположена в касательной плоскости. В точке, бесконечно близкой, но расположенной с другой стороны поверхности, жидкость покоится. Следовательно, скорость разрывна. Эту разрывность можно заменить введением вихревой трубки. Действительно, рассмотрим частный случай плоской поверхности, например, плоскости xy , где жидкость находится под этой плоскостью. Над плоскостью скорость будет равна нулю, снизу она будет постоянной и параллельной Ox .

Предположим, что изменение скорости происходит не внезапно, а непрерывным образом, хотя и очень быстро. В переходном слое u будет некоторой функцией от z :

$$u = f(z)$$

и производная

$$\frac{du}{dz} = f'(z)$$

будет отличной от нуля. Согласно сделанным предположениям, u — функция только от z , и $v = w = 0$. Тогда ξ и ζ равны нулю, а

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{du}{dz}$$

отлична от нуля и очень велика.

Таким образом, вихрь, заменяющий разрывность, будет параллельным плоскости разрыва и перпендикулярным скорости u .

119. Если поверхность раздела является кривой, а скорость переменной, то теорема также справедлива. Чтобы ее доказать, достаточно разложить поверхность на достаточно малые элементы, чтобы можно было рассматривать эти элементы как плоскости, а скорость постоянной на всей их протяженности. Всегда возможно выбрать толщину слоя перехода, которая будет очень маленькой даже по отношению к этим элементам. Поэтому поверхность можно заменить на слой вихревых трубок. Согласно предыдущему доказательству, каждая из трубок будет лежать в плоскость элемента, т.е. в касательной к поверхности плоскости, перпендикулярно скорости в рассматриваемой точке.

120. Сила (X, Y, Z) , представляющая электродинамическое воздействие на элемент тока должна быть одновременно перпендикулярна току и магнитной силе. Ток лежит в касательной к поверхности сосуда плоскости. Магнитная сила направлена подобно скорости и также лежит в касательной плоскости. Таким образом, сила (X, Y, Z) направлена по нормали к поверхности сосуда.

121. Чтобы применить к настоящему случаю теоремы, доказанные нами для бесконечной жидкости пп. **113–116**, необходимо учесть две группы электродинамических сил: 1° силы, которые действуют на токи, заменяющие вихревые трубки; 2° силы, действующие на поверхностные токи, введенные вместо поверхности.

В некоторых частных случаях дополнительные члены, порожденные второй группой сил, которые необходимо добавить в наши уравнения, будут иметь сумму равную нулю.

Например, если сосуд имеет форму цилиндра, образующие которого параллельны оси Ox , то на поверхность, по которой течет ток,

действуют силы, нормальные к поверхности и к оси Ox . Сумма проекций сил на ось Ox будет равна нулю. Таким образом, первая теорема п. 113 остается справедливой без изменений.

Если сосуд является телом вращения относительно Oz , то сумма моментов дополнительных сил относительно оси Oz равна нулю, поскольку все эти силы пересекают ось Oz . Таким образом, вторая теорема п. 113 также будет справедливой.

Если сосуд является сферой или пространством, заключенным между двумя концентрическими сферами, то вторая теорема справедлива для произвольной оси, проходящей через центр, поскольку сфера является поверхностью вращения относительно такой оси.

Если сосуд ограничен двумя плоскостями, параллельными, например, плоскости xy , то его можно рассмотреть как сосуд вращения вокруг оси z или как цилиндр, параллельный Ox и Oy , и применить замечания относительно этих разных случаев.

122. Цилиндрические вихревые трубки, параллельные оси Oz . При данных условиях $\xi = \eta = 0$, $w = 0$, при этом ζ , u , v зависят только от z .

Движение не изменится (п. 56), если ограничить часть жидкости двумя плоскостями, параллельными плоскости xy , например: $z = 0$, $z = 1$. Обе теоремы п. 113 по-прежнему применимы. Определим элемент $d\tau$. Разложим плоскость xy на элементы поверхности $d\omega$ и примем каждый из этих элементов за основание цилиндра, параллельного Oz и ограниченного плоскостями $z = 0$ и $z = 1$. В итоге, пространство, заключенное между двумя плоскостями будет поделено на бесконечное количество таких цилиндров. Затем проведем плоскости, параллельные плоскости xy , отстоящие друг от друга на dz . Объем, ограниченный одним из цилиндров и двумя такими плоскостями, примем за элемент $d\tau$, т. е.:

$$d\tau = d\omega dz.$$

Выражение из первой теоремы примет вид

$$\int v\zeta dz d\omega = 0.$$

Поскольку v , ζ не зависят от z , можно проинтегрировать по z в пределах от $z = 0$ до $z = 1$, откуда получим:

$$\int v\zeta d\omega = 0. \quad (9)$$

Таким же способом найдем

$$\int u \zeta d\omega = 0. \quad (10)$$

Если разложить определитель п. 116, то вторая теорема примет вид

$$\int (xu + yv) \zeta dz d\omega = 0$$

или, если проинтегрировать по z ,

$$\int (xu + yv) \zeta d\omega = 0. \quad (11)$$

123. Итак, мы вновь приходим к теоремам, доказанным нами в предыдущих главах.

Центр тяжести всех вихревых трубок остается неподвижным, что можно выразить следующими уравнениями

$$\int x \zeta d\omega = \text{const}, \quad \int y \zeta d\omega = \text{const},$$

а момент инерции трубок относительно некоторой оси, параллельной Oz , остается постоянным. Относительно самой оси Oz , например:

$$\int (x^2 + y^2) \zeta d\omega = \text{const}. \quad (12)$$

Дифференцируя эти уравнения по t , получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{dt} \zeta \partial\omega &= \int u \zeta d\omega = 0, \\ \int \frac{dy}{dt} \zeta \partial\omega &= \int v \zeta d\omega = 0, \\ \int \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \zeta \partial\omega &= \int (xu + yv) \zeta d\omega = 0. \end{aligned}$$

И вновь приходим к уравнениям (11), (12) и (13).

Наконец, учитывая, что сумма моментов количества движения трубок относительно Oz равна нулю, получаем следующее выражение

$$\int (uy - vx) \zeta d\omega = \text{const}$$

или

$$\int \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{vmatrix} d\omega = \text{const},$$

которое в данном случае является ничем иным как уравнением (10) п. 116:

$$\int D d\tau = \text{const}.$$

124. Непосредственное доказательство соотношения $\int D d\tau = \frac{T}{2}$. Вернемся к общему случаю. Посредством электродинамической аналогии мы доказали соотношение (10)

$$\int D d\tau = \frac{T}{2}.$$

Это соотношение, как мы сейчас увидим, можно также установить непосредственно.

Для краткости положим:

$$h = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$$

или

$$T = \int h d\tau.$$

Разложим определитель D по элементам первой строки

$$D = Ax + By + Cz,$$

при этом

$$A = \eta w - \zeta v, \quad B = \zeta u - \xi w, \quad C = \xi v - \eta u.$$

Вычислим A

$$\begin{aligned} 2A &= 2\eta w - 2\zeta v = w \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right) - v \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) = \\ &= u \frac{du}{dx} - u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} - v \frac{dv}{dx} + w \frac{du}{dz} - w \frac{dw}{dx} = \\ &= u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} - \frac{dh}{dx}. \end{aligned}$$

Выражения B и C выводятся аналогичным образом из соображений симметрии.

Рассмотрим интеграл

$$\int_s \left[(lx + my + nz) \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - (lu + mv + nw)(xu + yv + zw) \right] d\omega.$$

Аналогично доказательствам, приведенным нами выше уже несколько раз (п. 114), этот интеграл, взятый по всей поверхности сферы с очень большим радиусом, равен нулю. Преобразуем его по уже использованной нами формуле:

$$\int lX d\omega = \int \frac{dX}{dx} d\tau$$

или

$$\int \sum lX d\omega = \int \sum \frac{dX}{dx} d\tau,$$

$$X = x \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - u(xu + yv + zw) = xh - uK,$$

где

$$K = xu + yv + zw.$$

Получаем следующие выражения

$$\frac{dX}{dx} = x \frac{dh}{dx} + h - \frac{du}{dx} K - u^2 - u \left(x \frac{du}{dx} + y \frac{dv}{dx} + z \frac{dw}{dx} \right),$$

$$\frac{dY}{dy} = y \frac{dh}{dy} + h - \frac{dv}{dy} K - v^2 - v \left(x \frac{du}{dy} + y \frac{dv}{dy} + z \frac{dw}{dy} \right),$$

$$\frac{dZ}{dz} = z \frac{dh}{dz} + h - \frac{dw}{dz} K - w^2 - w \left(x \frac{du}{dz} + y \frac{dv}{dz} + z \frac{dw}{dz} \right).$$

Два последних уравнения находятся по аналогии с первым. Запишем равенство

$$\int \sum \frac{dX}{dx} d\tau = 0.$$

Выполняя суммирование и учитывая уравнение неразрывности, после очевидных сокращений получаем

$$\sum \frac{dX}{dx} = h - 2(Ax + By + Cz) = h - 2D,$$

откуда

$$\int h d\tau - \int 2D d\tau = 0, \quad \int D d\tau = \frac{1}{2} \int h d\tau = \frac{T}{2}.$$

125. Вихревые трубки вращения вокруг Oz . Предположим, что вихревые трубки представляют собой трубки вращения вокруг оси Oz . В этом случае введем пополярные координаты, полагая

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Согласно сделанному предположению, вихрь в каждой точке перпендикулярен меридиану.

Таким образом, если σ — величина вихря, то:

$$\xi = -\sigma \sin \varphi, \quad \eta = \sigma \cos \varphi, \quad \zeta = 0.$$

В силу симметрии (п. 107), скорость (u, v, w) находится в меридианной плоскости и выполняются соотношения

$$u = \frac{d\rho}{dt} \cos \varphi, \quad v = \frac{d\rho}{dt} \sin \varphi, \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

Кроме того, как мы уже видели в п. 108, $\frac{\sigma}{\rho}$ — постоянная.

Подставим эти значения в наши уравнения: некоторые из них при этом становятся тождественными. Из оставшихся рассмотрим в частности следующее:

$$\int (u\eta - v\xi) d\tau = 0. \quad (13)$$

Для того чтобы определить элемент $d\tau$, рассмотрим, например, меридианную плоскость zy , разложим ее на элементы поверхности $d\omega$. Каждый из этих элементов при вращении вокруг Oz порождает объем. Если проведем меридианные плоскости под углом $d\varphi$, то эти плоскости вырежут в объемах части, подобные цилиндрам с сечением $d\omega$ и высотой $\rho d\varphi$. Объем этих частей будет иметь вид

$$d\tau = \rho d\omega d\varphi.$$

Уравнение (15) примет вид

$$\int \sigma \frac{d\rho}{dt} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \rho d\omega d\varphi = 0$$

или

$$\int \sigma \frac{d\rho}{dt} \rho d\omega d\varphi = 0. \quad (14)$$

Необходимо взять интеграл по всем элементам $d\omega$ одной половины плоскости zy в пределах от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$.

Поскольку подинтегральное выражение не зависит от φ , то можно проинтегрировать по φ и записать

$$\int \sigma \rho \frac{d\rho}{dt} d\omega = 0. \quad (15)$$

Теперь преобразуем определитель D , умножая его на другой, равный единице.

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} x & y & z \\ \xi & \eta & \zeta \\ u & v & w \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x \cos \varphi + y \sin \varphi & -x \sin \varphi + y \cos \varphi & z \\ \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi & -\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi & \zeta \\ u \cos \varphi + v \sin \varphi & -u \sin \varphi + v \cos \varphi & w \end{vmatrix} \end{aligned}$$

или

$$D = \begin{vmatrix} \rho & 0 & z \\ 0 & \sigma & 0 \\ \frac{d\rho}{dt} & 0 & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix} = \sigma \left(\rho \frac{dz}{dt} - z \frac{d\rho}{dt} \right).$$

Если подставим это значение D в соотношение (10), то получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \int D d\tau &= \int D \rho d\omega d\varphi = \frac{T}{2}, \\ 2\pi \int D \rho d\omega &= \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

$$4\pi \int \sigma \rho d\omega \left(\rho \frac{dz}{dt} - z \frac{d\rho}{dt} \right) = T.^1 \quad (16)$$

¹В связи с ошибкой в расчетах, вместо этого уравнения Гельмгольц предложил следующее:

$$4\pi \int \sigma \rho d\omega \left(\rho \frac{dz}{dt} - 2z \frac{d\rho}{dt} \right) = T.$$

Впрочем, наличие множителя 2 не влияет на результаты, которые мы продемонстрируем и которые полагаются только на рассмотрение порядка величины различных множителей. — *Прим. автора.*

126. Величина скорости. Пусть существует единственная бесконечно тонкая трубка кругового сечения и ее радиус остается постоянным. Соотношение (17):

$$\int \sigma \rho \frac{d\rho}{dt} d\omega = 0$$

выражает, что

$$\int \sigma \rho^2 d\omega = \text{const.}$$

Действительно, если дифференцировать это последнее отношение по t , отмечая при этом, что $\sigma d\omega$ представляет собой момент трубки и является постоянным, то вновь приходим к уравнению (17).

Предположим, что

$$\int \sigma d\omega = M, \quad (1)$$

$$\int \sigma \rho^2 d\omega = MR^2, \quad (2)$$

где M будет постоянной, так же как и MR^2 .

Если σ повсюду имеет один знак, то R будет находиться между крайними значениями ρ , ρ_0 и ρ_1 .

Действительно, пусть ρ_0 — максимальное значение ρ , тогда:

$$MR^2 < \int \sigma \rho_0^2 d\omega$$

или

$$MR^2 < \rho_0^2 \int \sigma d\omega = M\rho_0^2,$$

$$R^2 < \rho_0^2,$$

также можно было бы доказать, что

$$R^2 > \rho_1^2,$$

следовательно,

$$\rho_0 > R > \rho_1.$$

Если трубка бесконечно тонкая, то ρ_0 и ρ_1 очень мало отличаются друг от друга и от среднего радиуса трубки. Этот средний радиус также будет мало отличаться от R и может быть рассмотрен как постоянная, также как и R . Таким образом, единственное движение, которое может произвести трубка, сводится к переносу, параллельному оси Oz . Какой будет скорость переноса? *A priori* очевидно, что она будет постоянной,

так как при переносе положение трубки относительно Oz не изменяется. Отсюда можно было бы заключить, что скорость зависит от формы сечения.

Ничего подобного! Скорость является постоянной и очень большой, как было доказано Гельмгольцем на основании уравнения (3), с учетом порядка величин T , U , v и $\frac{d\varphi}{dt}$.

Если сечение трубки бесконечно тонкое, то точка, расположенная на конечном расстоянии от трубки, будет иметь конечную скорость. А точка, расположенная в окрестности этой трубки, будет иметь очень большую скорость. Радиус сечения трубки и расстояние от этой точки до края этого сечения будут всегда очень малыми по сравнению с R . Для получения приемлемой аппроксимации рассмотрим близкую к трубке цилиндрическую область и применим к ней формулы для цилиндрических трубок.

127. Рассмотрим бесконечно тонкую прямолинейную трубку. Для того чтобы определить скорость, заменим эту трубку на бесконечный прямолинейный ток. Скорость представлена тем же вектором, что и магнитная сила, следовательно, она обратно пропорциональна расстоянию от рассматриваемой точки до оси тока. В точке, бесконечно близкой к этой прямой, скорость будет бесконечно большой. Таким образом, живая сила T — бесконечна.

Векторный потенциал (F, G, H) определяется соотношением:

$$F = \int \frac{\xi}{2\pi} r \, dl \text{ и т. д.}$$

Пусть прямолинейная трубка параллельна оси x .

В данном случае отношение $\frac{\xi}{2\pi}$ постоянно. Величина F была бы потенциалом равномерно наэлектризованной бесконечной прямой. В точке, бесконечно близкой к прямой, этот потенциал имеет порядок $\log \rho$, где ρ является расстоянием от точки до прямой.

128. Пусть теперь существует круговая трубка или круговой ток, рассматриваемый вместо трубки. В плоскости, нормальной к окружности в точке O , выберем точку M очень близкую к O . Найдём магнитную силу и векторный потенциал в точке M , порожденные круговым током, и сравним их с теми, которые были бы порождены прямолинейным ток-

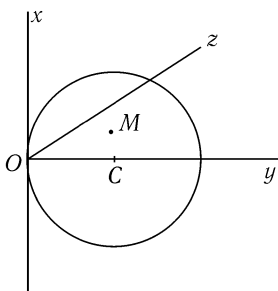


Рис. 32

ом, направленным по касательной в точке O и имеющим ту же силу, что и круговой ток.

Примем точку O за начало отсчета (рис. 32), касательную — за ось x , диаметр OC — за ось y . Тогда точка M будет находиться в плоскости yz .

Пусть сила тока равна единице; ds — элемент тока, dx — его проекция на ось Ox , r — расстояние от ds до точки M :

$$F = \int \frac{dx}{r}.$$

Необходимо проинтегрировать в пределах от $-R$ до $+R$, где R — радиус окружности.

Пусть $PP' = ds$, а $P_1P'_1 = dx$ — проекция PP' на ось x (рис. 33), равная dx ; r_1 — расстояние от $P_1P'_1$ до M . Векторный потенциал, порожденный прямолинейным током, выражается следующим образом:

$$F_1 = \int \frac{dx}{r_1}.$$

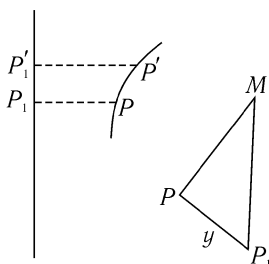


Рис. 33

Этот интеграл необходимо проинтегрировать в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Однако, поскольку мы хотим изучить только порядок величины F_1 , то можно рассмотреть ее в пределах от $-R$ и $+R$.

Действительно, элементы, расположенные на конечном расстоянии от M , дают в выражении F_1 конечные вклады, которыми можно пренебречь по сравнению с очень большими членами, заданными элементами, близкими к M .

В результате запишем

$$F - F_1 = \int dx \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Можно найти верхний предел этого интеграла. Действительно, пусть

- | | |
|---------------|--------------------------|
| $0, y_0, z_0$ | координаты точек M , |
| $x, y, 0$ | координаты точек P , |
| $x, 0, 0$ | координаты точек P_1 . |

В треугольнике $MP P_1$ можно ввести следующие обозначения

$$MP = r, \quad MP_1 = r_1, \quad PP_1 = y.$$

Соотношение

$$\left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right| = \frac{r_1 - r}{rr_1}$$

меньше, чем

$$(r_1 - r) \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} \right).$$

Поскольку $r_1 - r < y$, получаем:

$$\left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right| < y \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} \right)$$

и

$$F - F_1 < \int \frac{y dx}{r^2} + \int \frac{y dx}{r_1^2}.$$

Справедливы равенства

$$r^2 = \overline{MP}^2 = x^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2,$$

$$\int \frac{y dx}{r^2} = \int \frac{y dx}{x^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2},$$

откуда

$$\int \frac{y dx}{r^2} < \int \frac{y dx}{x^2}.$$

Когда точка P бесконечно приближается к нулю, отношение $\frac{y}{x^2}$ стремится к конечному пределу $2R$, где R — радиус окружности. Таким образом, интегралы $\int \frac{y dx}{r^2}$ и $\int \frac{y dx}{r_1^2}$ остаются конечными, следовательно, разность $F - F_1$ является конечной.

129. Порядок величины векторного потенциала. Поскольку разность $F_1 - F$ конечная, мы можем заменить круговую трубку на прямолинейную трубку с целью нахождения порядка величины векторного потенциала.

Сначала предположим, что речь идет о единственной трубке и что вихрь постоянен. Прямолинейная трубка будет цилиндром с круговым сечением, а векторный потенциал будет равен потенциалу притягивающей массы, распределенной по цилиндру, с плотностью $\frac{\xi}{2\pi}$.

Пусть ρ_0 — радиус цилиндра. Точку, расстояние ρ от которой до оси больше, чем ρ_0 , назовем внешней. Во внешней точке потенциал будет таким же, как если бы вся притягивающая масса была сконцентрирована на оси с плотностью

$$\pi\rho_0^2\frac{\zeta}{2\pi} = \frac{\zeta\rho_0^2}{2}.$$

Потенциал в такой точке будет иметь вид

$$\zeta\rho_0^2\log\rho \quad (\rho > \rho_0). \quad (3)$$

Для точки внутри цилиндра, т. е. при $\rho < \rho_0$ потенциал получается разложением цилиндра на две части путем проведения через рассматриваемую точку цилиндрической поверхности, которая имеет ту же ось, что и цилиндр. Внешний кольцевой слой не действует на точку, а другая часть производит то же действие, как если бы вся масса была сконцентрирована на его оси.

Следовательно, притяжение равно

$$\begin{aligned} & -\frac{\zeta\rho_0^2}{\rho} \quad \text{для } \rho > \rho_0, \\ & -\zeta\rho_0 \quad \text{для } \rho = \rho_0, \\ & -\zeta\rho \quad \text{для } \rho < \rho_0. \end{aligned}$$

Таким образом, потенциал будет выражаться

$$-\frac{\zeta\rho^2}{2} + C. \quad (4)$$

Значение потенциалов (3) и (4) должны совпадать при $\rho = \rho_0$. Из этого условия определяем константу C :

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta\rho_0^2}{\rho} + C &= -\zeta\rho_0^2\log\rho_0, \\ C &= \zeta\rho_0^2\left(\frac{1}{2} - \log\rho_0\right). \end{aligned}$$

Предположим, что момент трубки $\zeta\rho_0$ конечный. Если ρ_0 очень мал, то векторный потенциал будет иметь порядок величины $\log\rho_0$.

130. Порядок величины живой силы. Пусть P — векторный потенциал, σ — вихрь и они перпендикулярны меридиану. Живая сила выражается

$$I = \int \sigma P d\tau = \int \sigma P \rho d\omega d\varphi,$$

или, проинтегрировав по φ ,

$$I = 2\pi \int \sigma P \rho d\omega.$$

Момент трубки $\int \sigma d\omega$ мы рассматриваем как конечный по условию. Потенциал P имеет порядок $\log \rho_0$, следовательно, живая сила будет также этого порядка, то есть очень большой. Что же касается скорости, то она того же порядка, что и притяжение рассмотренного выше цилиндра, то есть $\frac{1}{\rho_0}$.

131. Скорость движения. Положим

$$A = \int \sigma \rho^2 z d\omega = MR^2 z_0, \quad (5)$$

где

$$MR^2 = \int \sigma \rho^2 d\omega = \text{const}, \quad (6)$$

а z_0 — ордината точки, расположенной внутри меридианного сечения трубки. Действительно, пусть z_1 и z_2 — крайние ординаты этого сечения.

Покажем, что $z_1 > z_0 > z_2$. Действительно, справедливо равенство

$$\int \sigma \rho^2 z_1 d\omega = z_1 \int \sigma \rho^2 d\omega = z_1 MR^2.$$

С другой стороны,

$$\int \sigma \rho^2 z d\omega < \int \sigma \rho^2 z_1 d\omega$$

или

$$z_0 MR^2 < z_1 MR^2$$

и

$$z_0 < z_1.$$

Таким же образом можно доказать, что $z_0 > z_2$.

Продифференцируем A по t , и поскольку момент трубки $\sigma d\omega$ является постоянным, то

$$\frac{dA}{dt} = MR^2 \frac{dz_0}{dt} = \int \sigma d\omega \left(2\rho z \frac{d\rho}{dt} + \rho^2 \frac{dz}{dt} \right).$$

С другой стороны, из уравнения (3) п. 125 получим:

$$\int \sigma \rho^2 \frac{dz}{dt} d\omega = \int \sigma \rho z \frac{d\rho}{dt} d\omega + \frac{T}{4\pi}.$$

Следовательно,

$$\frac{dA}{dt} = MR^2 \frac{dz_0}{dt} = 3 \int \sigma \rho z \frac{d\rho}{dt} d\omega + \frac{T}{4\pi}. \quad (7)$$

Считая, что z_0 постоянна, из уравнения (1) выводим

$$0 = \int \sigma \rho \frac{d\rho}{dt} z_0 d\omega, \quad (8)$$

Из уравнений (7) и (8) получаем:

$$MR^2 \frac{dz_0}{dt} = 3 \int \sigma \rho \frac{d\rho}{dt} (z - z_0) d\omega + \frac{T}{4\pi}. \quad (9)$$

Первое слагаемое в правой части конечно. Действительно, интеграл $\int \sigma d\omega$ является конечным также как и ρ , а производная $\frac{d\rho}{dt}$ является составляющей скорости вдоль радиус-вектора. Это очень большая величина порядка $\frac{1}{\varepsilon}$. Разность $z - z_0$ меньше, чем диаметр ε сечения трубки. Таким образом, $\frac{d\rho}{dt}(z - z_0)$ — конечно.

Следовательно, можно пренебречь первым членом в правой части и ограничиться следующим выражением:

$$\frac{dz_0}{dt} = \frac{T}{4\pi} \times \frac{1}{MR_0^2}.$$

Из этого уравнения следует, что

1°. Скорость $\frac{dz_0}{dt}$ — очень большая, того же порядка, что и живая сила T .

2°. Она существенно постоянна, поскольку сила T — постоянна. Справедливо, что первый член является переменным, однако мы доказали, что он незначителен по сравнению с T .

Итак, вихревая трубка будет перемещаться с очень большой скоростью параллельно оси Oz .

132. Порядок величины скорости. Непосредственное доказательство. Известно, что скорость (u, v, w) представлена тем же вектором, что и магнитная сила. Пусть AB — элемент тока ds (рис. 34); P — магнитный полюс, равный единице. Сила, с которой элемент AB действует на этот полюс, перпендикулярна плоскости PAB и выражается

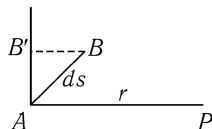


Рис. 34

$$\frac{AB' \times i}{r^2},$$

где AB' — проекция AB на перпендикуляр к PA , i — сила тока и r — расстояние AP .

По абсолютной величине:

$$\frac{AB' \times i}{r^2} < \frac{i ds}{r^2}.$$

Разложим нашу вихревую трубку на элементы объема и заменим каждый из них элементом тока. Если σ — интенсивность вихря, то сила тока должна быть равна $\frac{\sigma d\omega}{2\pi}$ п. 43, следовательно,

$$i ds = \frac{\sigma ds d\omega}{2\pi} = \frac{\sigma d\tau}{2\pi},$$

где $d\omega$ — элемент сечения, $d\tau$ — элемент объема трубки.

Верхний предел скорости будет иметь вид:

$$\int \frac{\sigma d\tau}{2\pi r^2}.$$

Разложим трубку на элементы следующим образом. Примем точку P за центр и опишем concentрические сферы. Эти сферы ограничат в трубке объемы, имеющие формы сферических сегментов. Рассмотрим, в частности, один из таких сегментов, ограниченный сферами радиуса r и $r + dr$, а также интеграл

$$\int \frac{\sigma d\tau}{r^2},$$

взятый по всему объему этого сегмента. Пусть σ_1 — наибольшее значение, которое принимает σ в этом сферическом сегменте. Все элементы подинтегрального выражения одного знака, следовательно,

$$\int \frac{\sigma d\tau}{r^2} < \int \frac{\sigma_1 d\tau}{r^2}.$$

Здесь r можно считать постоянным для всего объема сегмента, что позволяет записать следующее неравенство:

$$\int \frac{\sigma d\tau}{r^2} < \frac{\sigma_1}{r^2} \int d\tau.$$

Интеграл $\int d\tau$ представляет собой сегмент, который равен λdr , где λ — сечение этого сегмента. Таким образом,

$$\int \frac{\sigma d\tau}{r^2} < \frac{\sigma_1 \lambda dr}{r^2}.$$

Пусть теперь $d\omega$ — элемент сечения трубки. Рассмотрим элементарную трубку, порожденную вращением вокруг оси этого элемента. Пусть $d\lambda$ — сечение этой трубки сферой радиуса r .

Разделим эти сферы на две группы:

1° Радиус которых меньше, чем некоторый верхний предел наибольшего диаметра ε сечения полной трубки. Возьмем, например, за этот предел 2ε ;

2° Сферы, радиус которых больше 2ε .

Тогда верхний предел скорости принимает вид:

$$\int_0^{2\varepsilon} \frac{\sigma_1 \lambda dr}{r^2} + \int_{2\varepsilon}^a \frac{\sigma_1 \lambda dr}{r^2}. \quad (10)$$

В первом интеграле λ очевидно меньше, чем $4\pi r^2$, полная поверхность сферы. Итак, приходим к следующему неравенству;

$$\int_0^{2\varepsilon} \frac{\sigma_1 \lambda dr}{r^2} < 4\pi \int_0^{2\varepsilon} \sigma_1 dr,$$

или

$$\int_0^{2\varepsilon} \frac{\sigma_1 \lambda dr}{r^2} < 8\pi \sigma_1 \varepsilon.$$

Как всегда, положим момент трубки равным конечной величине. Величина $\sigma_1 \Omega$ является конечной, и σ_1 имеет тот же порядок величины, что и $\frac{1}{\Omega}$, т. е. $\frac{1}{\epsilon^2}$, а $\sigma_1 \epsilon$ будут иметь порядок $\frac{1}{\epsilon}$.

Во втором интеграле:

$$d\lambda = \frac{d\omega}{\sin \theta},$$

где θ — угол, под которым сфера пересекает трубку (рис. 35); θ всегда больше некоторого предела θ_0 , отличного от нуля. Действительно, ни одна сфера второй группы не может стать касательной к трубке. Иначе касание находилось бы в меридианном сечении и радиус сферы был бы меньше ϵ . Итак, справедливо неравенство

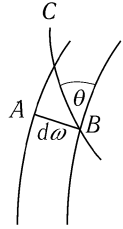


Рис. 35

$$d\lambda < \frac{d\omega}{\sin \theta_0}$$

и

$$\lambda < \frac{\Omega}{\sin \theta_0},$$

$$\int_{2\epsilon}^a \frac{\sigma_1 \lambda dr}{r^2} < \int_{2\epsilon}^a \frac{\sigma_1 \Omega}{\sin \theta_0} \frac{dr}{r^2}.$$

Первый множитель $\frac{\sigma_1 \Omega}{\sin \theta_0}$ конечен, а второй имеет вид

$$\int_{2\epsilon}^a \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2\epsilon} - \frac{1}{a}.$$

Этот интеграл также имеет порядок $\frac{1}{\epsilon}$.

Таким образом, два члена выражения (10) имеют один и тот же порядок $\frac{1}{\epsilon}$, и сама скорость по величине имеет порядок не более $\frac{1}{\epsilon}$.

ГЛАВА 8

Условия устойчивости установившегося движения

133. Установившееся движение. Пусть жидкость бесконечна и вихревые трубки параллельны оси Oz . Движение, очевидно, будет установившимся, если ζ являются функциями только от расстояния $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

В этом случае вокруг оси Oz существует ряд концентрических слоев, внутри которых вихрь будет иметь постоянное значение.

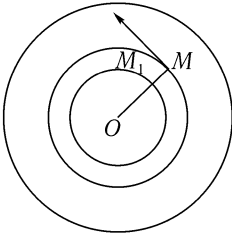


Рис. 36

Пусть M — некоторая точка (рис. 36), скорость этой точки будет направлена перпендикулярно радиус-вектору OM , проведенному из центра в эту точку. За время dt точка M переместится в M_1 , расположенную на том же расстоянии от точки O . Таким образом, точка M описывает окружность с центром O . Пусть ζ — значение вихря в точке M в момент времени t ; ζ' — значение вихря в M_1 в момент времени $t + dt$; ζ_1 — его значение в M в момент $t + dt$.

Я утверждаю, что $\zeta = \zeta'$.

Действительно, частица, которая в момент времени t находилась в точке M , перемещается за время $t + dt$ в точку M_1 , принадлежащую той же трубке. А для одной и той же трубки $\zeta = \text{const}$.

Кроме того, $\zeta_1 = \zeta'$.

Действительно, в момент времени t две точки M и M_1 находятся на одной и той же окружности с центром в точке O . Согласно предположению, ζ зависит только от расстояния до точки O .

Следовательно, интенсивность вихря в точке M_1 постоянна. Поскольку M — любая точка, этот результат справедлив для любой другой точки, а движение является установившимся.

134. Устойчивость движения. Устойчиво ли установившееся движение?

Иначе говоря, если существует какая-либо причина, по которой эти концентрические слои будут бесконечно мало деформироваться, то

будет ли эта деформация увеличиваться или же жидкость будет стремиться вновь принять свое первоначальное движение?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, нам необходимо изучить изменения скорости (u, v) при этих деформациях.

Мы нашли в общем виде (п. 94), что

$$u = -\frac{d\psi}{dy}, \quad v = \frac{d\psi}{dx},$$

где

$$\psi = - \int \frac{\zeta' d\omega'}{\pi} \log \rho.$$

Если мы перейдем к полярным координатам, полагая:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

то составляющие скорости примут вид:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad r \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\psi}{dr}.$$

135. Частный случай. Предположим, что существует единственная цилиндрическая трубка, для которой перпендикулярное сечение является окружностью. Внутри этой окружности ζ постоянно. Скорость в некоторой точке будет ζr внутри цилиндра и $\frac{\zeta r_0^2}{r}$ вне его, где r_0 — радиус перпендикулярного сечения.

При этом

$$\psi = \zeta r_0^2 \log r.$$

Предположим, что цилиндр претерпевает небольшую деформацию, так что, например, точка M переходит в M_1 , а радиус-вектор $OM = s$ становится функцией от времени t и угла φ , определенного на окружности с некоторым первоначальным диаметром OX (рис. 37).

За время dt точка M_1 перейдет в M'_1 , а полярные координаты φ и s получат приращения:

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dt} dt = \frac{d\psi}{r dr} dt$$

и

$$ds = -\frac{d\psi}{r d\varphi} dt.$$

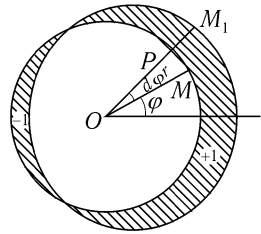


Рис. 37

С другой стороны, поскольку s — функция от φ и t , имеем

$$ds = \frac{ds}{d\varphi} d\varphi + \frac{ds}{dt} dt,$$

откуда, заменяя ds и $d\varphi$ их значениями и разрешая относительно $\frac{ds}{dt}$, получим

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{d\psi}{r d\varphi} - \frac{d\varphi}{r dr} \frac{ds}{d\varphi}. \quad (11)$$

Разложим s по кратным гармоникам φ согласно формуле Фурье:

$$s = r_0 + \sum a_n \cos n\varphi + \sum b_n \sin n\varphi. \quad (12)$$

Полная поверхность трубки не должна изменяться. Следовательно, постоянный член равен r_0 с точностью до бесконечно малых второго порядка. Величины a_n и b_n являются функциями от t , независимыми от φ и очень малыми, поскольку были предположены очень малые деформации. Функция ψ с точностью до константы является потенциалом притягивающей материи, которая создается гравитирующим цилиндром, образующим трубку с плотностью $\frac{\zeta}{2\pi}$. Чтобы упростить дальнейшую запись, положим $\zeta = 1$.

Потенциал ψ можно рассматривать как образованный из двух частей: одной, ψ_0 , вызванной недеформированным цилиндром, другой, $\delta\psi$, — деформированными частями (заштрихованными на рис. 37). Толщина этих деформированных частей не очень значительна. Потенциал будет иметь то же значение, если вместо задания постоянной объемной плотности определить поверхностную плотность, пропорциональную их толщине $s - r_0$.

Эта поверхностная плотность будет иметь вид $\frac{s - r_0}{2\pi}$, что приводит к следующему выражению

$$\frac{s - r_0}{2\pi} = \frac{\sum a_n \cos n\varphi + \sum b_n \sin n\varphi}{2\pi}. \quad (13)$$

Потенциал $\delta\psi$ является функцией от r и φ , и, следовательно, можно записать:

$$\delta\psi = \sum c_n \cos n\varphi + \sum d_n \sin n\varphi.$$

Для внешней точки притягивающих слоев функция $\delta\psi$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta(\delta\psi) = 0.$$

Следовательно,

$$\Delta(c_n \cos n\varphi) = 0, \quad \Delta(d_n \sin n\varphi) = 0,$$

где c_n и d_n — функции только от r , так что

$$c_n = c'_n r^n + c''_n r^{-n}, \quad d_n = d'_n r^n + d''_n r^{-n},$$

где c'_n, c''_n, d'_n, d''_n — постоянные.

Поскольку $\delta\psi$ не должно стремиться к бесконечности одновременно с r , необходимо, чтобы выполнялось условие

$$c'_n = d'_n = 0.$$

Для внутренней точки функция отличается от предыдущей. Необходимо, чтобы она оставалась конечной при $r = r_0$. Следовательно, внутри цилиндра имеем следующее равенство:

$$c''_n = d''_n = 0.$$

Отсюда следует, что для внешней точки следует положить:

$$\delta\psi = \sum g_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cos n\varphi + \sum h_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \sin n\varphi, \quad (14)$$

а для внутренней точки:

$$\delta\psi = \sum g'_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\varphi + \sum h'_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \sin n\varphi. \quad (15)$$

Потенциал остается непрерывным при пересечении притягивающей поверхности. Таким образом, две формулы (14) и (15) должны иметь одинаковое значение при $r = r_0$. Для этого требуется, чтобы

$$g'_n = g_n, \quad h'_n = h_n.$$

Однако при пересечении поверхности сила испытывает внезапный скачок, равный произведению плотности на 4π . Выражение для силы следующее:

1° во внешней точке:

$$\frac{d\delta\psi}{dr} = \sum -n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \frac{1}{r} (g_n \cos n\varphi + h_n \sin n\varphi); \quad (16)$$

2° во внутренней точке:

$$\frac{d\delta\psi}{dr} = \sum n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \frac{1}{r} (g_n \cos n\varphi + h_n \sin n\varphi). \quad (17)$$

При $r = r_0$ разность этих двух выражений должна быть равна 4π , умноженному на выражение для плотности (13).

Отсюда получаем соотношение:

$$-2 \sum \frac{n}{r_0} (g_n \cos n\varphi + h_n \sin n\varphi) = 2 \sum (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Приравнявая коэффициенты при $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$, получим:

$$g_n = -\frac{a_n r_0}{n}, \quad h_n = -\frac{b_n r_0}{n}.$$

Если подставим эти значения в выражение $\delta\psi$, то для потенциала ψ будем иметь:

1° во внешней точке:

$$\psi = \psi_0 + \delta\psi = \psi_0 - \sum \frac{r_0 \zeta}{n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \left(\frac{r_0}{r} \right)^n; \quad (18)$$

2° во внутренней точке:

$$\psi = \psi_0 - \sum \frac{r_0 \zeta}{n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \left(\frac{r}{r_0} \right)^n. \quad (19)$$

(мы восстановили множитель ζ , отброшенный ранее).

При $r = r_0$ две формулы совпадают и имеют вид (предполагая вновь $\zeta = 1$):

$$\psi = \psi_0 - \sum \frac{r_0}{n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Теперь необходимо проверить уравнение (11).

Действительно, при $r = r_0$ имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\varphi} &= \sum r_0 (a_n \sin n\varphi - b_n \cos n\varphi), \\ \frac{d\psi}{n d\varphi} &= \sum (a_n \sin n\varphi - b_n \cos n\varphi), \\ \frac{ds}{d\varphi} &= r_0 \sum (-na_n \sin n\varphi + nb_n \cos n\varphi), \end{aligned}$$

где $\frac{ds}{d\varphi}$ — бесконечно малая первого порядка. Поскольку бесконечно малыми второго порядка можно пренебречь, нам достаточно учитывать конечные величины в коэффициенте при $\frac{ds}{d\varphi}$ в (11).

При такой степени аппроксимации этот коэффициент сводится к следующему:

$$\frac{1}{r_0} \frac{d\psi_0}{dr_0} = 1.$$

Произведем в уравнении (11) замену, что приведет к следующему равенству:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= - \sum (a_n \sin n\varphi - b_n \cos n\varphi) - \sum (-na_n \sin n\varphi + nb_n \cos n\varphi) = \\ &= \sum \frac{da_n}{dt} \cos n\varphi + \frac{db_n}{dt} \sin n\varphi. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих гармониках, получим

$$\frac{da_n}{dt} = (1 - n)b_n, \quad \frac{db_n}{dt} = -(1 - n)a_n. \quad (20)$$

Эти уравнения имеют решение:

$$a_n = A \sin(1 - n)t + B, \quad b_n = A \cos(1 - n)t + B. \quad (21)$$

Из выражений (21) видно, что если a_n и b_n малы в момент времени $t = 0$, то они всегда будут оставаться очень малыми. Таким образом, движение является устойчивым.

136. Частные деформации. Пусть деформация такова, что все коэффициенты, кроме двух, a_n и b_n , равны нулю. Деформированная кривая будет выражаться уравнением:

$$s = r_0 + a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi. \quad (22)$$

Следовательно, радиус-вектор имеет n максимумов и n минимумов, а кривая — ряд впадин и выпуклостей (рис. 38).

При изменении во времени кривая сохраняет ту же форму, вращаясь вокруг оси Oz со скоростью $(1 - n)\zeta$.

Если кривая была бы более сложной, то есть если бы имелось более чем два коэффициента, отличных от нуля, то можно было бы разложить ее на простые кривые, каждая из которых соответствовала бы одному значению n и вращалась бы вокруг Oz со своей скоростью.

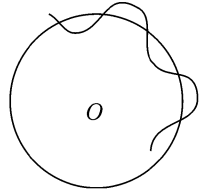


Рис. 38

137. Пусть $n = 1$, тогда:

$$s = r_0 + a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi.$$

Это уравнение с точностью до бесконечно малых второго порядка представляет окружность, центр которой определяется координатами a_1 и b_1 . В этом случае $1 - n$ равно нулю:

$$\frac{da_1}{dt} = 0, \quad \frac{db_1}{dt} = 0.$$

Центр круга (a_1, b_1) неподвижен.

Пусть $n = 2$. Тогда

$$s = r_0 + a_2 \cos 2\varphi + b_2 \sin 2\varphi.$$

С точностью до бесконечно малых второго порядка это уравнение представляет собой уравнение эллипса с центром в начале координат с очень малым эксцентриситетом. С другой стороны, $1 - n = 1$. Следовательно,

$$a_2 = A \sin t + B, \quad b_2 = A \cos t + B,$$

т. е. эллипс будет равномерно вращаться.

138. Эта теорема справедлива в случае произвольного эллипса. Действительно, пусть ζ — предположительно постоянное значение вихря внутри эллипса.

Введем декартову систему координат с осями, определяемыми главными осями эллипса в некоторый момент времени.

Составляющие скорости выражаются в виде:

$$u = -\frac{d\psi}{dy}, \quad v = \frac{d\psi}{dx}.$$

Они также представляют собой составляющие притяжения, производимого притягивающей материей, наполняющей цилиндр и имеющей постоянную плотность $\frac{\zeta}{2\pi}$. Итак, эллиптический цилиндр можно рассматривать как эллипсоид с бесконечной осью.

Для однородного эллипсоида

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1.$$

Составляющие его притяжения на внутренних точках имеют вид:

$$Ax, By, Cz,$$

где A, B, C — константы.

Уравнение цилиндра сводится к виду:

$$ax^2 + by^2 = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{d\psi}{dx} = Ax, \quad \frac{d\psi}{dy} = By.$$

За время dt рассматриваемая внутренняя точка переместится. Составляющие этого перемещения могут быть записаны в виде

$$u dt = -\frac{d\psi}{dy} dt = -By dt, \quad v dt = -\frac{d\psi}{dx} dt = Ax dt.$$

Всегда можно определить два числа α и β таких, что

$$A = \alpha + \beta a, \quad B = \alpha + \beta b,$$

где $a \neq b$ и $A \neq B$.

Тогда наше перемещение разлагается на два других, имеющих соответственно составляющие:

$$\begin{cases} -\beta by dt = dx, \\ \beta ax dt = dy, \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} -\alpha y dt = dx, \\ \alpha x dt = dy. \end{cases} \quad (II)$$

Перемещение (I) не изменяет формы эллипса. Для доказательства надо продифференцировать уравнение эллипса:

$$2ax dx + 2by dy = -2ax\beta by dt + 2by\beta ax dt = 0.$$

Перемещение (II) представляет собой вращение вокруг оси Oz . За время dt и, следовательно, за любой другой промежуток времени эллипс будет вращаться без деформации¹.

139. Концентрические вихревые трубки. Рассмотрим вихревую трубку, ограниченную двумя круговыми цилиндрическими поверхностями C и C' , вращающимися вокруг оси Oz (рис. 39). Допустим, что внутри цилиндра C радиуса r_0 вихрь имеет постоянное значение $\zeta + \zeta'$. Между двумя цилиндрами он имеет другое постоянное значение ζ' . Наконец, вне цилиндра C' , с радиусом r'_0 , вихрь равен нулю.

¹ Движение цилиндрического эллиптического вихря было изучено Г. Кирхгофом (Механика. Лекции по математической физике. М.: АН СССР, 1962). — Прим. ред.

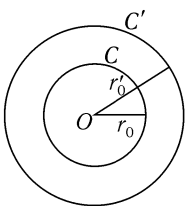


Рис. 39

Действие этих двух концентрических трубок будет эквивалентно сумме действий двух трубок, одна из которых имела бы радиус r_0 и значение вихря, равное ζ , а другая — радиус r_0 с вихрем ζ' .

Каждая из этих трубок обусловила бы установившееся движение (п. 133). При наложении их действия, движение снова будет установившимся.

140. Условие устойчивости. Будет ли это движение устойчивым?

Чтобы ответить на этот вопрос, будем действовать методом, аналогичным тому, который мы использовали ранее.

Пусть ψ_0 — значение ψ для пока недеформированного случая: ψ_0 зависит только от r , скорость перпендикулярна радиус-вектору и равна $\frac{d\psi_0}{dr}$.

Если $r < r_0$, то точка находится внутри обоих цилиндров, следовательно,

$$\frac{d\psi_0}{dr} = \zeta r + \zeta' r.$$

Если $r_0 < r < r'_0$, то точка находится вне первого цилиндра C и внутри второго C' , то есть имеем следующее выражение

$$\frac{d\psi_0}{dr} = \frac{\zeta r_0^2}{r} + \zeta' r.$$

Наконец, если $r > r'_0$, то точка будет лежать вне обоих цилиндров. Получаем соотношение

$$\frac{d\psi_0}{dr} = \frac{\zeta r_0^2}{r} + \frac{\zeta r'^2_0}{r}.$$

При $r = r_0$ и $r = r'_0$ эти формулы принимают вид:

$$\frac{d\psi_0}{dr_0} = (\zeta + \zeta') r_0, \quad \frac{d\psi_0}{dr'_0} = \frac{\zeta r_0^2}{r'_0} + \zeta' r'_0.$$

Полагая $\frac{r'_0}{r} = \varepsilon$, получаем соотношения:

$$\frac{1}{r_0} \frac{d\psi_0}{dr_0} = \zeta + \zeta',$$

$$\frac{1}{r'_0} \frac{d\psi_0}{dr'_0} = \zeta \varepsilon^2 + \zeta'.$$

Сообщим цилиндрам C и C' малую деформацию такого вида, что их радиус-векторы можно представить соответственно в форме:

$$\begin{aligned} s &= r_0 + \sum a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi, \\ s &= r'_0 + \sum a'_n \cos n\varphi + b'_n \sin n\varphi. \end{aligned}$$

Учет деформации для одной трубки привел к следующему выражению для ψ :

$$\psi = \psi_0 - \sum \frac{r_0 \zeta}{n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\pm n},$$

где n имеет такой знак, что множитель $\left(\frac{r}{r_0} \right)^{\pm n}$ всегда меньше единицы.

Для двух трубок значение ψ имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 - \sum \frac{r_0 \zeta}{n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\pm n} - \\ &- \sum \frac{r'_0 \zeta'}{n} (a'_n \cos n\varphi + b'_n \sin n\varphi) \left(\frac{r}{r'_0} \right)^{\pm n}. \end{aligned}$$

Запишем для каждой из трубок дифференциальное уравнение (11), в результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\frac{1}{r_0} \frac{d\psi}{d\varphi} - (\zeta + \zeta') \frac{ds}{d\varphi}, \\ \frac{ds'}{dt} &= -\frac{1}{r'_0} \frac{d\psi}{d\varphi} - (\zeta \varepsilon^2 + \zeta') \frac{ds'}{d\varphi}. \end{aligned}$$

Представляя s и ψ в виде рядов и приравнявая коэффициенты при $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ для $r = r_0$ и $r = r'_0$, получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= b\zeta + b'\zeta'\varepsilon^{n-1} - nb(\zeta + \zeta'), \\ \frac{da'}{dt} &= b\zeta\varepsilon^{n+1} + b'\zeta' - nb'(\zeta\varepsilon^2 + \zeta'), \\ \frac{db}{dt} &= -a\zeta - a'\zeta'\varepsilon^{n-1} + na(\zeta + \zeta'), \\ \frac{db'}{dt} &= -a'\zeta'\varepsilon^{n+1} - a'\zeta' + na'(\zeta\varepsilon^2 + \zeta') \end{aligned} \tag{23}$$

(отбрасывая ненужные показатели n).

Итак, находим четыре линейных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами, для определения четырех неизвестных функций a, b, a', b' . Общие решения этих уравнений сводятся к сумме экспонент вида $e^{\alpha t}$.

Если α является вещественной и положительной, то это решение бесконечно увеличивается во времени, а движение неустойчиво, поскольку деформация будет возрастать.

Если экспоненты имеют вид $e^{\alpha t}$, а α является вещественной и положительной, то деформация будет стремиться к нулю. Можно было бы считать, что движение устойчиво. Однако ничего подобного. Характеристическое уравнение имеет равные по значению, но противоположные по знаку корни. Нельзя иметь экспоненты $e^{-\alpha t}$, не имея одновременно $e^{+\alpha t}$.

Следовательно, неустойчивость будет возникать каждый раз, когда характеристическое уравнение будет иметь вещественный корень.

Если корни являются сложными и имеют вид $\alpha + \sqrt{-1}\beta$, то в решении появятся члены

$$e^{\alpha + \sqrt{-1}\beta t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + \sqrt{-1} \sin \beta t),$$

и будет существовать по крайней мере еще одна экспонента, модуль которой бесконечно увеличивается. Движение вновь будет неустойчивым.

Таким образом, для устойчивости¹ необходимо и достаточно выполнение условия, что все корни характеристического уравнения будут иметь вид:

$$\alpha \sqrt{-1},$$

где α — вещественное число. Тогда решение будет равно сумме членов, таких что

$$e^{\sqrt{-1}\alpha t} = \cos \alpha t + \sqrt{-1} \sin \alpha t$$

остаются конечными.

Теперь найдем условия, для которых это было бы заведомо выполнено.

Положим, для краткости:

$$\alpha = \zeta - n(\zeta + \zeta'), \quad \beta = \zeta' \varepsilon^{n-1}, \quad \gamma = \zeta \varepsilon^{n+1}, \quad \delta = \zeta' - n(\zeta \varepsilon^2 + \zeta').$$

¹В линейном приближении. — *Прим. ред.*

Уравнения (23) принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \alpha b + \beta b', & \frac{da'}{dt} &= \gamma b + \delta b', \\ \frac{db}{dt} &= -\alpha a - \beta a', & \frac{db'}{dt} &= -\gamma a - \delta a'.\end{aligned}\tag{24}$$

Положим также

$$\lambda a + \lambda' a' = x, \quad \lambda b + \lambda' b' = y,$$

где λ и λ' — два числа, которые пока не определены.

Умножим два первых уравнения (24) на λ и λ' и сложим их. Получим следующее выражение

$$\frac{dx}{dt} = b(\lambda\alpha + \lambda'\gamma) + b'(\lambda\beta + \lambda'\delta).$$

Теперь выберем λ и λ' таким образом, чтобы второй член имел вид Sy .

Величины λ и λ' определяются уравнениями:

$$\lambda\alpha + \lambda'\gamma = S\lambda, \quad \lambda\beta + \lambda'\delta = S\lambda'.$$

Если λ и λ' удовлетворяют этим условиям, то справедливо следующее равенство:

$$\frac{dx}{dt} = Sy.$$

Произведя те же действия с двумя последними уравнениями системы (24), найдем

$$\frac{dy}{dt} = -Sy.$$

Значение S получим из условия, что определитель однородных уравнений для λ и λ' равен нулю.

Тогда S будет корнем уравнения:

$$\begin{vmatrix} \alpha - S & \gamma \\ \beta & \delta - S \end{vmatrix} = 0.\tag{25}$$

Это уравнение второй степени. Пусть S и S_1 — корни. При этом λ , λ' , x , y — значения, соответствующие S , а λ_1 , λ'_1 , x_1 , y_1 — значения, соответствующие S_1 . Получим

$$\lambda_1 a + \lambda'_1 a' = x_1, \quad \lambda_1 b + \lambda'_1 b' = y_1, \quad \frac{dx_1}{dt} = S_1 y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = -S_1 x_1.$$

Таким образом, общее решение наших уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned} x &= A \sin(St + B), & y &= A \cos(St + B), \\ x_1 &= A_1 \sin(S_1 t + B), & y_1 &= A_1 \cos(S_1 t + B). \end{aligned}$$

Если S — вещественно, то синус и косинус остаются конечными и имеет место устойчивость.

Если S является мнимым, то $S = s + \sqrt{-1}u$ и

$$\sin St = e^{ut}(\cos st + \sqrt{-1} \sin st).$$

Модуль бесконечно увеличивается по времени t , а движение является неустойчивым.

Необходимым и достаточным условием для устойчивого движения является вещественность корней S .

Уравнение для S может быть записано в виде:

$$S^2 - S(\alpha + \delta) + \alpha\delta - \beta\gamma = 0.$$

Корни будут вещественными, если справедливы неравенства

$$(\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma) > 0$$

или

$$(\alpha + \delta)^2 + 4\beta\gamma > 0.$$

Замена $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ их значениями приводит к следующему неравенству

$$[\zeta - n(\zeta + \zeta') - \zeta' + n(\zeta\epsilon^2 + \zeta')]^2 + 4\zeta\zeta'\epsilon^{2n} > 0.$$

Это неравенство должно удовлетворяться при всех целых значениях n .

Заметим, что если вихри ζ и ζ' одного знака, то это неравенство всегда выполняется. В этом случае движение всегда устойчиво.

141. Мы не будем делать полного исследования приведенного неравенства. Рассмотрим лишь частный случай, когда

$$\zeta\epsilon^2 + \zeta' = 0.$$

Это условие означает то, что скорость $(\zeta\epsilon^2 + \zeta')\frac{r_0^2}{r}$ в точке, находящейся вне цилиндра C' , равна нулю до деформации. Выберем единицы

таким образом, что $\zeta = 1$. Тогда $\zeta' = -\varepsilon^2$. Движение будет устойчивым, если доказанное неравенство удовлетворяется при всех значениях n . Записывая, что оно выполняется при $n = 2$, получим необходимое условие устойчивости:

$$[1 - 2(1 - \varepsilon^2) + \varepsilon^2]^2 - 4\varepsilon^6 > 0$$

или

$$(1 - \varepsilon^2)^2(1 - 4\varepsilon^2) > 0.$$

Первый множитель всегда положителен. Поэтому необходимо, чтобы

$$1 - 4\varepsilon^2 > 0,$$

или, поскольку ε положительно,

$$\varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Следовательно, если радиус внутреннего цилиндра C больше, чем половина радиуса внешнего цилиндра C' , то устойчивость невозможна.

142. Объяснение эксперимента. Представим, что в жидкости существуют два течения противоположных направлений или только различных скоростей. Две жидкие массы, имеющие разные скорости, будут тереться друг о друга и на поверхности раздела будут появляться мелкие вихри. Обычно, чтобы объяснить образование этих вихрей, говорят, что они вызваны трением двух жидких потоков. Это недостаточное объяснение. Действительно, пусть в начальный момент времени имеются две жидкие массы с разными скоростями, которые для большей простоты будем считать постоянными по величине и направлению. Это состояние не может оставаться постоянным во времени по причине трения, вызванного вязкостью жидкости. Однако вначале кажется, что должен возникать переходный слой, в котором скорость бы изменялась монотонно и в котором вихри были бы равномерно распределены. На самом же деле такая картина не наблюдается, а образуются мелкие вихри, которые, далее, собираются в отдельные вихревые трубки. Это происходит в результате того, что при указанных условиях состояние, при котором вихри равномерно распределены, неустойчиво, что можно доказать, опираясь на предыдущие рассуждения.

Действительно, сообщим всей жидкости, содержащейся внутри цилиндра C , скорость равномерного вращения $(\zeta + \zeta')$. Внешняя жидкость

остается в состоянии покоя. Скорость будет разрывной на поверхности цилиндра, следовательно, трение будет порождать переходную (пограничную) область перехода, ограниченную двумя концентрическими к C цилиндрами.

Таким образом, в рассматриваемом нами случае будем иметь два концентрических цилиндра. Внутри первого значение вихря равно $\zeta + \zeta'$. Вне второго вихрь равен нулю. Наконец, в кольцевой области, он монотонно изменяется. Однако для простоты будем предполагать, что в кольцевой области этот вихрь имеет постоянное значение, промежуточное между 0 и $\zeta + \zeta'$. Пусть этим значением является величина ζ' . Положим

$$\zeta + \zeta' = a.$$

Среднее постоянное значение ζ' , как и в предыдущем примере, определим из условия

$$\zeta \varepsilon^2 + \zeta' = 0.$$

Это выражение означает, что жидкость снаружи находится в состоянии покоя.

Отсюда получаем следующее отношение:

$$\zeta' = \frac{a\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Поскольку область перехода в начальный момент времени очень незначительна, то ε очень близко к единице, а ζ' очень велико. Однако при значении ε большем, чем $\frac{1}{2}$, эти условия приводят к неустойчивости, как установлено в п. 141.

Предположим, что внешняя жидкость не покоится, а обладает некоторой скоростью b . Тогда

$$\zeta \varepsilon^2 + \zeta' = b$$

и снова возникает трение, поскольку скорость разрывна. Внося значения ζ и ζ' в найденное нами условие, мы снова можем заключить, что имеет место неустойчивость.

ГЛАВА 9

Жидкость, обладающая свободной поверхностью

143. До сих пор мы изучали лишь движение бесконечных жидкостей или жидкостей, полностью заполняющих сосуд, в который они помещены. Теперь же рассмотрим случай, для которого жидкость не заполняет сосуд полностью, а имеет свободную поверхность при соприкосновении с другой жидкостью.

Представим, что частицы описывают окружности, центр которых находится на оси z и плоскость которых перпендикулярна этой оси. Если такое движение возможно, то оно обязательно будет стационарным (перманентным).

Если давление и плотность одинаковы по всей длине окружности, то уравнение непрерывности заведомо выполняется. В каждый момент времени система вращается вокруг оси Oz и скорость частицы M (рис. 40) направлена по касательной к окружности C и имеет одинаковую величину для всех точек этой окружности.

Возьмем на плоскости ZOM некоторый малый элемент поверхности: вращаясь вокруг Oz , этот элемент порождает также некоторую малую поверхность. Жидкость, ограниченная этой поверхностью, также вращается вокруг оси Oz , не изменяя объема.

Положим:

$$MP = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Согласно предположениям, давление p и плотность ρ являются функциями лишь от r и от z . Следовательно, справедливы неравенства:

$$w = 0, \quad ux + vy = 0.$$

Значение выражения

$$T = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

также будет являться функцией только от r и от z .

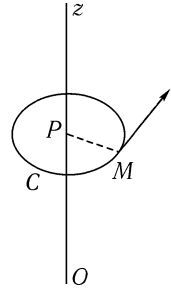


Рис. 40

Если сила тяжести является единственной внешней силой, которая действует на жидкость (при этом ось z вертикальна), то как нами было установлено (п. 4):

$$V = gz, \quad \psi = - \int \frac{dp}{\rho} + V.$$

Функция ψ существует при условии, что ρ является функцией лишь от p . Оно выполнено, если жидкость представляет собой однородную жидкость или газ, который подвергается изотермическому или адиабатическому изменению.

В лагранжевых обозначениях составляющие ускорения выражаются следующим образом:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{du}{dt}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{dv}{dt}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{dw}{dt}. \quad (1)$$

(См. п. 4).

С другой стороны, ускорение частицы жидкости, двигающейся равномерно по окружности, сводится к нормальному ускорению:

$$\frac{u^2 + v^2}{r} = \frac{2T}{r},$$

направленному по MP . Его составляющие равны:

$$-\frac{2T}{r} \frac{x}{r}, \quad -\frac{2T}{r} \frac{y}{r}, \quad 0.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{dr}{dx}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{2T}{r}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Таким образом, необходимо, чтобы функция ψ зависела только от r , что справедливо также для $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ и для T . Скорость не зависит от z и вихревые трубки являются круговыми цилиндрами с осью Oz .

144. Простые частные случаи. Рассмотрим сначала простые частные случаи.

1°. Скорость обратно пропорциональна расстоянию r . Тогда T обратно пропорциональна r^2 ,

$$T = \frac{\alpha}{r^2},$$

где α — постоянная.

Учитывая уравнения (2), получаем соотношение

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{2\alpha}{r^3}$$

и, интегрируя, приходим к следующему выражению:

$$\psi = \frac{\alpha}{r^2} + C = T + C.$$

Следовательно,

$$\psi - T = \text{const.} \quad (3)$$

Мы снова получим уравнение Бернулли, что легко было предвидеть. Действительно, результаты пп. **24–25** применимы, когда существует функция скорости, в частности, если вихрь равен нулю или скорость изменяется в отношении $\frac{1}{r}$. Для вихревой трубки с осью Oz вихрь вне трубки равен нулю и условия теоремы также выполнены.

145. 2°. Скорость пропорциональна расстоянию, иначе говоря, жидкость вращается вокруг оси z с постоянной угловой скоростью, т. е. двигается подобно твердому телу. Очевидно, имеются следующие соотношения:

$$T = \alpha r^2, \quad \frac{d\psi}{dr} = -2\alpha r, \quad \psi = -\alpha r^2 + \text{const.}$$

Таким образом,

$$\psi + T = \text{const.}, \quad (4)$$

что и следовало ожидать.

Действительно, вспомним, что в п. **5** мы ввели интеграл

$$J = \int u \, dx + v \, dy + w \, dz,$$

взятым вдоль дуги кривой. Мы доказали, что справедливо равенство:

$$\frac{dJ}{dt} = \int (d\psi + dT),$$

где $d\psi + dT$ — полный дифференциал, а производная $\frac{dJ}{dt}$ равняется нулю, когда кривая интегрирования замкнута.

В рассматриваемом случае согласно уравнению (4):

$$\psi + T = \text{const}$$

или

$$\frac{dJ}{dt} = 0,$$

даже если кривая интегрирования не замкнута.

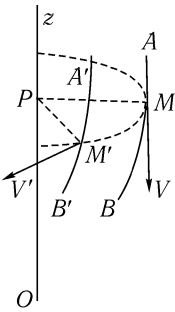


Рис. 41

Действительно, допустим, что жидкость равномерно вращается вокруг оси Oz . Кривая интегрирования также вращается вокруг оси Oz не деформируясь. Проведем из точки M (рис. 41) вектор MV , представляющий собой скорость. Если считать этот вектор силой, то интеграл J является работой, которую произвела бы эта сила, когда точка пробегает по кривой интегрирования AB . Если кривая, вращаясь вокруг Oz , принимает положение $A'B'$, то вектор $M'V'$ сохраняет ту же величину и то же положение относительно $A'B'$. Действительно, $M'V'$ получается из MV при повороте вокруг оси Oz , переводящим точку M в точку M' .

Следовательно, когда точка M' пробегает кривую $A'B'$, то работа J силы $M'V'$ является такой же, как работа силы MV , когда точка M пробегает кривую AB .

146. Форма свободной поверхности. Предположим, что единственной внешней силой, которая действует на жидкость, является сила тяжести.

Примем за ось z вертикальную прямую, считая z направленной вверх. При этих условиях

$$V = -gz, \quad \psi = -gz - \int \frac{dp}{\rho}.$$

Если жидкость однородна, то

$$p = \text{const}$$

и

$$\psi = -gz - \frac{p}{\rho}. \quad (5)$$

Если речь идет о газе, температура которого постоянна, то плотность ρ пропорциональна давлению. Обозначая через β постоянную, получим следующее равенство:

$$\rho = \beta p, \quad \psi = -gz - \frac{1}{\beta} \ln p. \quad (6)$$

Наконец, для газа, который подвергается адиабатическим преобразованиям,

$$\rho = \beta p^\gamma,$$

где $\gamma = \frac{c}{C}$ — отношение удельной теплоты при постоянном объеме c к удельной теплоте при постоянном давлении C . Таким образом, справедливо равенство:

$$\psi = -gz - \frac{1}{\beta(1-\gamma)} p^{1-\gamma}. \quad (7)$$

146'. Пусть имеется однородная жидкость, свободная поверхность которой находится под давлением атмосферы. Если через p обозначим избыток действительного давления по отношению к атмосферному давлению, то в уравнении (5) необходимо положить

$$p = 0,$$

что приводит к

$$\psi = -gz, \quad (8)$$

где ψ — функция от r , а это и есть уравнение свободной поверхности жидкости.

Предположим, что существует только одна вихревая трубка, имеющая форму кругового цилиндра с осью Oz . Вихрь постоянен внутри этого цилиндра и равен нулю снаружи. При этом цилиндр будет иметь равномерное вращательное движение.

Пусть r_0 — радиус цилиндра. Внутри его поверхности, т.е. при $r < r_0$, скорость пропорциональна r и

$$T = \alpha r^2.$$

Снаружи, при $r > r_0$, имеется функция скоростей и

$$T = \frac{\alpha'}{r^2}.$$

Эти два выражения для T должны иметь одинаковое значение на поверхности цилиндра, т.е. при $r = r_0$. Следовательно,

$$\alpha r_0^2 = \frac{\alpha'}{r_0^2},$$

откуда

$$\alpha = \alpha r_0^4.$$

При помощи этих соотношений вычислим значения ψ .

Внутри цилиндра, как известно,

$$\psi + T = \text{const},$$

поэтому

$$\psi = -\alpha r^2 + C;$$

а снаружи

$$\psi - T = \text{const},$$

значит,

$$\psi = \frac{\alpha r_0^4}{r^2} + C'.$$

Эти формулы должны привести к одному значению ψ , при $r = r_0$. Таким образом,

$$-\alpha r_0^2 + C = \frac{\alpha r_0^4}{r^2} + C',$$

что задает соотношение между постоянными C и C' .

Постоянную C' можно считать произвольной. Изменить ее значение — все равно, что переместить плоскость xy параллельно самой себе, это приведет к тому, что к z , а следовательно, и к ψ , просто добавится постоянная. Пусть $C' = 0$. При этом выборе для $r = \infty$ имеем

$$\psi = 0,$$

а также

$$z = 0.$$

Таким образом, свободная поверхность жидкости может рассматриваться как асимптотическая плоскость. Именно эта плоскость выбрана в качестве xy , она является уровнем жидкости, расположенным на очень большом расстоянии от оси.

Следовательно, уравнение свободной поверхности относительно к оси вращения и асимптотической плоскости будет иметь вид:

1° внутри вихревой трубки

$$gz = -\alpha(r^2 - r_0^2); \quad (9)$$

2° вне этой трубки

$$gz = -\frac{\alpha r_0^4}{r^2}. \quad (10)$$

Первое уравнение представляет собой параболоид: внутри трубки меридианным сечением свободной поверхности будет маленькая дуга параболы.

Второе уравнение представляет собой поверхность, меридианное сечение которой образуется двумя асимптотическими ветвями к оси r (рис. 42). Две кривые соединяются на сечении вихревой трубки.

Отметим, что z всегда отрицательна. Поэтому свободная поверхность целиком расположена ниже плоскости xy .

Это обстоятельство не зависит от частных гипотез, которые введены нами ранее. Это — общий случай, что мы сейчас и покажем.

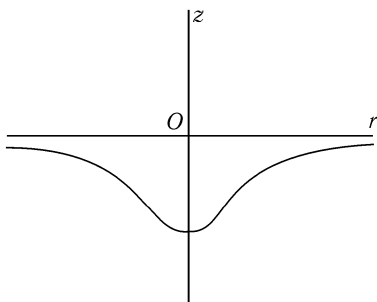


Рис. 42

Действительно, функция ψ равна нулю при $r = \infty$. Следовательно, справедливо равенство

$$\psi = \int_{+\infty}^r -2T \frac{dr}{r} = \int_r^{+\infty} 2T \frac{dr}{r}.$$

Поскольку T и r обязательно положительны, то это будет выполняться и для ψ . Следовательно, z , согласно уравнению (8), будет отрицательной.

Этот результат не соответствует наблюдениям. Действительно, все, кто имел возможность наблюдать смерчи, утверждают, что жидкость, наоборот, поднимается к центру вихря так, что она образует нечто вроде утолщения под свободной поверхностью. Это разногласие между вычислениями и наблюдениями, вероятно, частично связано с тем, что в нашем вычислении мы предполагали равномерное распределение давления на поверхность жидкости. Это условие, по-видимому, не выполняется в случае со смерчем. Однако сомнительно, чтобы эта гипотеза имела достаточно большое влияние на результат вычислений и устранила отмеченную нами трудность.

147. Распределение давления в газе. Если движущаяся среда является газом, то мы можем определить его состояние, предполагая, что давление p меняется в плоскости, параллельной плоскости xu . Если газ сохраняет постоянную температуру, то необходимо воспользоваться формулой (6), и тогда в плоскости $z = z_0$ имеем

$$\ln p = -\beta g z_0 - \beta \psi.$$

Значение ψ становится равным нулю на бесконечности. Пусть p_0 — соответствующее значение p , тогда:

$$\ln p_0 = -\beta g z_0$$

и

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\beta \psi.$$

Второй член является отрицательным, поскольку ψ всегда положительно, как мы только что показали. Следовательно, отношение $\frac{p}{p_0}$ меньше единицы, и, значит, внутри вихря имеется область пониженного давления.

Если газ подвергается адиабатическому изменению, то лучше воспользоваться формулой (7). В плоскости $z = z_0$ давление p будет иметь

выражение:

$$p^{1-\gamma} = -\beta(1-\gamma)z_0 - \beta(1-\gamma)\psi.$$

На бесконечности ψ равно нулю, а $p = p_0$, следовательно, имеется равенство

$$p_0^{1-\gamma} = -\beta(1-\gamma)z_0,$$

которое влечет

$$p^{1-\gamma} - p_0^{1-\gamma} = -\beta(1-\gamma)\psi.$$

Величины β , $1-\gamma$, ψ положительны, что приводит к неравенству

$$p^{1-\gamma} - p_0^{1-\gamma} < 0$$

или

$$p < p_0.$$

Это еще раз подтверждает, что внутри вихря существует область пониженного давления.

148. Случай нескольких несмешиваемых жидкостей. Форма поверхностей раздела. Предположим, что имеются только две жидкости. Пусть ρ_1 и p_1 — плотность и давление первой жидкости, а ρ_2 и p_2 — плотность и давление второй жидкости, и пусть ψ_1 и ψ_2 — функции ψ этих двух жидкостей:

$$\psi_1 = -gz_1 - \frac{p_1}{\rho_1},$$

$$\psi_2 = -gz_2 - \frac{p_2}{\rho_2}.$$

На поверхности раздела $z_1 = z_2$ давления должны быть равными $p_1 = p_2$. Однако о функциях ψ_1 и ψ_2 известно лишь то, что их производные $\frac{d\psi_1}{dr}$ и $\frac{d\psi_2}{dr}$ должны иметь одинаковое значение. Из условия

$$\frac{d\psi_1}{dr} = \frac{d\psi_2}{dr}$$

можно вывести, что

$$\psi_1 - \psi_2 = \text{const},$$

или

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)p = \text{const}.$$

Следовательно, давление является постоянным на поверхности раздела, и эта поверхность будет иметь ту же форму, что и свободная поверхность.

ГЛАВА 10

Влияние вязкости жидкостей

149. Гипотезы. Обозначения. Когда речь идет о вязкой жидкости, т. е. о жидкости, частицы которой при движении обладают трением друг относительно друга, соприкасаясь друг с другом, то силовой функции уже не существует. Действительно, сила трения зависит от скорости и теорема Гельмгольца, доказанная нами выше, больше не применима.

Пока мы не рассматривали этот случай и приступить к вычислению можно, лишь опираясь на некоторые более или менее вероятные гипотезы, являющиеся, однако, общепринятыми.

Прежде всего допускается, что сила, вызванная вязкостью, имеет следующие составляющие¹

$$K \Delta u, \quad K \Delta v, \quad K \Delta w,$$

где K в системе лагранжевых переменных является постоянной.

Далее допускается, что на поверхности сосуда жидкость находится в состоянии покоя, иначе говоря, справедливо равенство:

$$u = v = w = 0.$$

Наконец, допускается, что на элемент dw этой поверхности действуют внешние силы, составляющие которых равны

$$K \frac{du}{dn} d\omega, \quad K \frac{dv}{dn} d\omega, \quad K \frac{dw}{dn} d\omega.$$

Предположим, что внешние силы, действующие на жидкость, допускают силовую функцию V . Если внести в уравнения Лагранжа силу

¹Имеется в виду обычное линейное вязкое трение. — *Прим. ред.*

вязкости, то эти уравнения примут следующий вид¹

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{du}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} + K \Delta u, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{dv}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} + K \Delta v, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{dw}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} + K \Delta w.\end{aligned}\tag{1}$$

Когда элемент объема $d\tau$ жидкости подвергается смещению, проекции которого представлены отрезками dx , dy , dz , то работа, осуществляемая силами, допускающими функцию V , будет представлять собой

$$\rho d\tau dV,$$

и, добавляя сюда работу силы вязкости, получаем реальную работу

$$d\mathfrak{S} = \rho d\tau [dV + K(\Delta u dx + \Delta v dy + \Delta w dz)].$$

Будем также полагать

$$d\mathfrak{S} = \rho d\tau dV',$$

где

$$dV' = dV + K(\Delta u dx + \Delta v dy + \Delta w dz).\tag{2}$$

Однако здесь необходимо отметить, что это обозначение dV' имеет лишь чисто символический смысл, поскольку dV' не является больше полным дифференциалом.

Далее запишем следующее выражение

$$d\psi = dV' - \frac{dp}{\rho}\tag{3}$$

и подставим уравнения (1) в упрощенном виде, аналогичном тому, который мы рассмотрели в п. 4:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{du}{dt}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{dv}{dt}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{dw}{dt}.\tag{4}$$

¹Они носят название уравнений Навье – Стокса. — *Прим. ред.*

Отметим, как было сказано выше, что речь идет только о символах: $d\psi$ не является больше полным дифференциалом, а определяется соотношением (3). $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ являются не производными одной и той же функции $\psi(x, y, z)$, а представляют собой лишь коэффициенты dx , dy , dz в выражении для $d\psi$.

150. Теорема Гельмгольца (п. 5–6) выражается через соотношение

$$\frac{dJ}{dt} = \int_C (d\psi + dT) = 0. \quad (5)$$

Интеграл, взятый по замкнутой кривой, равен нулю, когда $d\psi + dT$ является полным дифференциалом, т. е. когда речь идет о невязкой жидкости.

Но если не пренебрегать вязкостью, то $d\psi + dT$ больше не будет полным дифференциалом. Тогда, согласно соотношениям (2) и (3), получаем

$$\frac{dJ}{dt} = \int \left(dV - \frac{dp}{\rho} + dT \right) + K \int (\Delta u \, dx + \Delta v \, dy + \Delta w \, dz). \quad (6)$$

Первый интеграл, взятый по замкнутому контуру, равен нулю по теореме Гельмгольца (6). Следовательно, остается

$$\frac{dJ}{dt} = K \int (\Delta u \, dx + \Delta v \, dy + \Delta w \, dz). \quad (7)$$

Проведем через контур интегрирования C некоторую поверхность. Кривая C ограничивает площадь A . Пусть l , m , n — направляющие косинусы нормали к элементу $d\omega$ площади A . С помощью теоремы Стокса (8) мы нашли, что

$$J = 2 \int (l\xi + m\eta + n\zeta) \, d\omega,$$

где интеграл взят по всем элементам $d\omega$ площади A , а ξ , η , ζ определены через соотношения (1) п. 9.

Преобразуем интеграл (7) с помощью той же теоремы:

$$\begin{aligned} & \int \Delta u \, dx + \Delta v \, dy + \Delta w \, dz = \\ & = \int d\omega \left[l \left(\frac{d\Delta w}{dy} - \frac{d\Delta v}{dz} \right) + m \left(\frac{d\Delta u}{dz} - \frac{d\Delta w}{dx} \right) + n \left(\frac{d\Delta v}{dx} - \frac{d\Delta u}{dy} \right) \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что порядок дифференцирования можно изменить и записать

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta w}{dy} &= \Delta \frac{dw}{dy}, \\ \frac{d\Delta v}{dz} &= \Delta \frac{dv}{dz} \end{aligned}$$

и, вычитая одно из другого, получим

$$\frac{d\Delta w}{dy} - \frac{d\Delta v}{dz} = \Delta \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right) = 2\Delta\xi.$$

Наконец, преобразовывая аналогично другие члены, придем к формуле

$$\frac{dJ}{dt} = 2K \int (l\Delta\xi + m\Delta\eta + n\Delta\zeta) \, d\omega. \quad (8)$$

151. Условия, необходимые для применимости теоремы Гельмгольца. Было доказано в п. 14, что, согласно теореме Гельмгольца, поверхности вихрей, а значит, и вихревые линии сохраняются при движении жидкости, если пренебречь силами вязкости и трения. Если же принять во внимание последние силы, то наш результат более не будет справедливым в общем случае. Теорема будет снова правильной только при особых условиях, которые мы сейчас и рассмотрим.

Теорема Гельмгольца (п. 6) следует из равенства

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

Вдоль кривой, проведенной на вихревой поверхности, интеграл

$$J = 0,$$

поскольку по всей длине этой кривой вихрь касателен к поверхности.

Для того чтобы $\frac{dJ}{dt}$ оставалось равным нулю при введении силы вязкости, необходимо, чтобы выполнялось условие:

$$l\Delta\xi + m\Delta\eta + n\Delta\zeta = 0,$$

согласно уравнению (7).

Это соотношение показывает, что вектор $(\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta)$ должен находиться в плоскости элемента $d\omega$. Если он является касательным к поверхности $J = 0$ за время dt , то мы также получаем $J = 0$. Поскольку $\frac{dJ}{dt} = 0$, то вихревая поверхность не должна изменяться. Если мы хотим, чтобы вихревые линии сохранились, то необходимо, чтобы некоторый элемент этих линий вектора $(\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta)$ постоянно оставался касательным к вихревому вектору. Для этого необходимо, чтобы плоскость элемента $d\omega$ содержала сразу два введенных вектора, и поскольку это должно иметь место для *каждого* элемента $d\omega$, проходящего через вихрь, то необходимо, чтобы эти два вектора¹ совпадали по направлению, другими словами, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\Delta\xi}{\xi} = \frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta\zeta}{\zeta}. \quad (9)$$

В общем случае это условие не выполнено и вихревые линии не сохраняются.

152. В частном случае, когда существует функция скоростей, а вихрь равен нулю, т. е. справедливо равенство:

$$\xi = \eta = \zeta = 0$$

и все $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$ тождественно равны нулю. Для некоторой кривой можно записать

$$J = 0, \quad \frac{dJ}{dt} = 0.$$

Следовательно, функция скорости будет существовать в любой момент времени.

Это следствие наших доказательств, кажется, противоречит предположениям, на которых они основываются.

¹Вектор вихря (ξ, η, ζ) и вектор $(\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta)$. — *Прим. ред.*

153. Частные случаи, где вихревые линии сохраняются.

Предположим, что в бесконечной жидкости вихревые линии являются прямыми, параллельными оси z , ζ и η равны нулю так же, как и $\Delta\zeta$ и $\Delta\eta$. Однако ζ и $\Delta\zeta$ отличны от нуля. Условия (9) выполняются и вихревые линии сохраняются. При этом для того чтобы это доказать, воспользуемся симметрией.

Действительно, рассмотрим некоторую плоскость, параллельную плоскости xy . Эта плоскость является плоскостью симметрии, вне зависимости от трения. Если в начальный момент движения линии тока являются плоскими и расположены в плоскостях, параллельных плоскости xy , то они всегда остаются в этих плоскостях на основании симметрии, независимо от трения.

Однако при данных условиях ζ не сохраняет больше своего значения, а $\frac{dJ}{dt}$ не равняется нулю.

Действительно, примем за контур интегрирования перпендикулярное сечение вихревой трубки. В соответствии с этим выбором необходимо учесть, что справедливы равенства

$$l = m = 0, \quad n = 1,$$

отсюда получаем

$$J = 2 \int \zeta \, d\omega, \quad (10)$$

$$\frac{dJ}{dt} = -2K \int \Delta\zeta \, d\omega. \quad (11)$$

Площадь сечения трубки $d\omega$ является постоянной. Действительно, объем, ограниченный этой трубкой и двумя плоскостями $z = z_1$ и $z = z_2$, постоянен, согласно уравнению непрерывности. Этот объем равен

$$(z_1 - z_2) \, d\omega,$$

где z_1 и z_2 остаются постоянными, так как скорость всегда параллельна плоскости xy . Следовательно, $d\omega$ также постоянна.

Продифференцируем уравнение (9) по t , в результате получим

$$\frac{dJ}{dt} = 2 \int \frac{d\zeta}{dt} \, d\omega. \quad (12)$$

Сравним эти два выражения для $\frac{dJ}{dt}$. Поскольку интегралы взяты на одной и той же площади, то необходимо, чтобы

$$\frac{d\zeta}{dt} = K\Delta\zeta. \quad (13)$$

При этом производная $\frac{d\zeta}{dt}$ вычислена по лагранжевым переменным, то есть при наблюдении за частицей при ее движении.

Это уравнение (13) аналогично тому, которое определяет распределение тепла через проводимость¹. Только в последней задаче частицы обычно рассматриваются как неподвижные. Здесь же, напротив, ζ изменяется как температура жидкости, как если бы она имела то же самое движение и если бы K был коэффициентом проводимости. Однако при этих условиях происходила бы конвекция, приводящая к потере теплоты.

154. Обобщение основных теорем. Ранее мы доказали (п. 65 и далее, п. 113 и далее) несколько теорем, применимых к жидкостям, в которых отсутствует трение. Некоторые из них останутся справедливыми при наличии вязкости.

Действительно, пусть существует бесконечная жидкость, в которой вихревые трубки представляют собой цилиндры, параллельные оси Oz .

Мы видели (п.126), что если рассматривать ζ как плотность притягивающей материи, распространенной на плоскости xy , то полная масса $M = \int \zeta d\omega$ этой мнимой материи будет постоянной (т. к. интеграл взят по всем элементам $d\omega$ плоскости xy).

Определенная таким образом масса также является постоянной, если в жидкости имеется трение.

Действительно, продифференцируем

$$M = \int \zeta d\omega$$

по t , отмечая при этом, что элемент $d\omega$ постоянен. В результате получим

$$\frac{dM}{dt} = \int \frac{d\zeta}{dt} d\omega = K \int \Delta\zeta d\omega. \quad (14)$$

¹Это обычное уравнение теплопроводности. — *Прим. ред.*

Я утверждаю, что этот интеграл равен нулю. Для того чтобы это доказать, применим формулу Грина

$$\int \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) ds = \int (u \Delta v - v \Delta u) d\omega$$

к окружности очень большого радиуса, предполагая, что функции u и v или одна из них стремится к нулю на бесконечности. Интеграл в левой части равен нулю, поэтому

$$\int u \Delta v d\omega = \int v \Delta u d\omega.$$

Теперь пусть

$$u = 1, \quad v = \zeta,$$

что приводит к

$$\int \Delta \zeta d\omega = 0 \quad (15)$$

и к

$$M = \text{const.}$$

155. Центр тяжести этих двух мнимых масс неподвижен даже при наличии трения.

Действительно, координаты этого центра тяжести определены уравнениями

$$Mx_0 = \int \zeta x d\omega, \quad My_0 = \int \zeta y d\omega.$$

Продифференцируем первое уравнение по t и получим следующее уравнение

$$M \frac{dx_0}{dt} = \int \zeta u d\omega + \int \frac{d\zeta}{dt} x d\omega,$$

поскольку $d\omega$ является постоянным. Первый интеграл равен нулю, так как существование трения влияет только на значение производных u и v , а не на значения самих этих функций. В результате имеем равенство

$$M \frac{dx_0}{dt} = \int \frac{d\zeta}{dt} x d\omega = K \int \Delta \zeta x d\omega.$$

Применим вновь теорему Грина, полагая

$$u = x, \quad v = \zeta.$$

Поскольку x является величиной первого порядка, то $\Delta x = 0$.

Следовательно,

$$\int x \Delta \zeta d\omega = \int \zeta \Delta x d\omega = 0. \quad (16)$$

Отсюда $\frac{dx_0}{dt} = 0$, а x_0 является постоянным.

Используя то же самое доказательство, можно получить подобное заключение и для y_0 .

156. Момент инерции I мнимых масс относительно оси, параллельной Oz , является постоянным при отсутствии трения. Однако когда трение существует, тот же самый момент становится пропорциональным t .

Действительно,

$$I = \int \zeta (x^2 + y^2) d\omega$$

и

$$\frac{dI}{dt} = \int 2\zeta(xu + yv) d\omega + \int \frac{d\zeta}{dt}(x^2 + y^2) d\omega.$$

Первый интеграл равен нулю, как если бы не существовало трения, поскольку наличие трения не меняет значения u и v . Принимая во внимание уравнение (12), получим

$$\frac{dI}{dt} = \int \frac{d\zeta}{dt}(x^2 + y^2) d\omega = K \int \Delta \zeta (x^2 + y^2) d\omega.$$

Теорема Грина при $u = x^2 + y^2$, $v = \zeta$ приводит к следующим неравенствам

$$\int (x^2 + y^2) \Delta \zeta d\omega = \int \zeta \Delta (x^2 + y^2) d\omega,$$

или, отмечая, что

$$\Delta (x^2 + y^2) = 4,$$

получим

$$\int (x^2 + y^2) \Delta \zeta d\omega = 4 \int \zeta d\omega = 4M$$

и, наконец,

$$\frac{dI}{dt} = 4KM. \quad (17)$$

Производная $\frac{dI}{dt}$ постоянна и, следовательно, I изменяется пропорционально t . При этом мы вычислили, насколько быстро происходит это изменение.

157. Применение к одному простому случаю. Предположим, что в начальном положении ζ зависит только от расстояния $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ до оси z . На основании симметрии это условие будет выполнено всегда. Скорость в точке будет перпендикулярна радиус-вектору, опущенному из точки перпендикулярно оси Oz . Точка описывает окружность с центром на оси Oz в плоскости, перпендикулярной этой оси. В силу симметрии точка останется на этой окружности при наличии трения. Однако в этом последнем случае скорость уже не будет равномерной. Действительно, ζ является функцией от r и t . Поэтому имеет место соотношение

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial r} \frac{dr}{dt}.$$

Но поскольку r — постоянная величина, то $\frac{dr}{dt} = 0$ и легко получим равенство

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = K \Delta \zeta$$

или, согласно уже известной формуле, поскольку ζ зависит только от r , выражение

$$\frac{d\zeta}{dt} = K \left(\frac{d^2 \zeta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} \right). \quad (18)$$

Проинтегрируем это дифференциальное уравнение.
Рассмотрим интеграл

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{h}} F(x + \alpha\sqrt{t}) d\alpha,$$

где h является постоянной. Имеем также

$$\frac{dZ}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{h}} F' \frac{\alpha}{2\sqrt{t}} d\alpha.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\frac{dZ}{dt} = \left[e^{-\frac{\alpha^2}{h}} \left(-\frac{h}{2} \right) \frac{F'}{\sqrt{t}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{h}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{h}} F'' d\alpha.$$

Поскольку проинтегрированный член равен нулю для двух пределов, то это выражение сводится к следующему:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{h}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{h}} F'' d\alpha.$$

С другой стороны, справедливо равенство

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{h}} F'' d\alpha,$$

а следовательно,

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{h}{4} \frac{d^2 Z}{dx^2}.$$

Обобщим наши рассуждения и рассмотрим интеграл

$$Z = \iint e^{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{h}} F(x + \alpha\sqrt{\tau}, y + \alpha\sqrt{\tau'}) d\alpha d\beta.$$

Если в некоторый момент рассматривать y и τ' как постоянные величины, то Z является функцией лишь от x и от τ и, согласно вышесказанному, имеется соотношение:

$$\frac{dZ}{d\tau} = \frac{h}{4} \frac{d^2 Z}{dx^2}.$$

Также, если x и τ считать постоянными, то аналогичное соотношение имеет вид:

$$\frac{dZ}{d\tau'} = \frac{h}{4} \frac{d^2 Z}{dy^2}.$$

С другой стороны, несложно видеть, что

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dZ}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} + \frac{dZ}{d\tau'} \frac{d\tau'}{dt} = \frac{dZ}{d\tau} + \frac{dZ}{d\tau'}$$

или

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{h}{4} \Delta Z.$$

Для того чтобы отождествить это уравнение с уравнением (12), нам достаточно положить

$$h = 4K,$$

где K обязательно положительна.

Далее, принимая

$$\zeta = Z,$$

можно будет вычислить ζ для любого момента времени.

Для того чтобы найти функцию F , необходимо определить значение ζ в начальный момент времени, то есть при $t = 0$

$$\zeta_0 = \iiint e^{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{h}} F(x, y) d\alpha d\beta = F(x, y) \iiint e^{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{h}} d\alpha d\beta.$$

Так как

$$\iiint e^{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{h}} d\alpha d\beta = \frac{\pi}{4},$$

то уравнение

$$\zeta_0 = \frac{\pi}{4} F(x, y)$$

и определит функцию F .

Если начальное значение ζ зависит только от r , то F также зависит только от r и можно будет определить ζ в некоторый момент времени, при условии, что не нарушена симметрия или условия устойчивости выполняются.

158. Теорема Гельмгольца для относительного движения.

Теорема Гельмгольца показывает, что интеграл

$$J = \int u dx + v dy + w dz$$

является постоянным при наличии силовой функции. В случае относительного движения силовая функция отсутствует, и теорема более не справедлива.

Как мы знаем, имеем выражение

$$\frac{dJ}{dt} = \int d\psi + dT,$$

где

$$d\psi = dV - \frac{dp}{\rho},$$

когда существует потенциал V .

Если же потенциал больше не существует, то аналогичное выражение имеет вид

$$d\psi = X dx + Y dy + Z dz - \frac{dp}{\rho}.$$

Если переносное движение является, к примеру, вращением вокруг земной оси с угловой скоростью ω_0 , то получим

$$X dx + Y dy + Z dz = dV + 2\omega_0(v dx - u dy),$$

согласно теореме Кориолиса, понимая под потенциалом V обычную центробежную силу, при этом ось z является осью вращения. В результате получаем выражение

$$\frac{dJ}{dt} = \int (dV + dT) + \int 2\omega_0(v dx - u dy).$$

Первый интеграл равен нулю и поэтому

$$\frac{dJ}{dt} = 2\omega_0 \int (v dx - u dy).$$

Пусть C — кривая интегрирования. Спроецируем ее на плоскость xy . Пусть A — площадь, ограниченная этой проекцией (рис. 43), а M и M' — две бесконечно близкие точки. Тогда проекциями MM' на три оси будут отрезки dx , dy , dz . За время dt частицы, находящиеся на кривой C , перейдут на кривую C' и, в частности, точка M перейдет в точку M_1 , а M' в M'_1 . Проекциями MM_1 являются отрезки $u dt$, $v dt$, $w dt$. Четырехугольник $MM'M_1M'_1$ подобен параллелограмму, проекция которого на плоскость xy ограничивает площадь, равную

$$dt(v dx - u dy).$$

Таким образом, интеграл

$$dt \int (v dx - u dy)$$

представляет собой изменение $\frac{dA}{dt} dt$ площади A за время dt . Следовательно, получим соотношение:

$$\frac{dJ}{dt} = 2\omega_0 \frac{dA}{dt}$$

и

$$J = 2\omega_0 A + \text{const.}$$

Таким образом, если J_0 и A_0 — начальные значения J и A , то получаем

$$J_0 = 2\omega_0 A_0 + \text{const.}, \quad J - J_0 = 2\omega_0 (A - A_0).$$

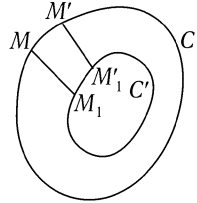


Рис. 43

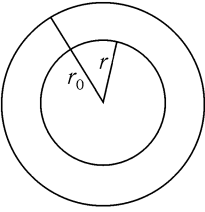


Рис. 44

Пусть имеется окружность радиуса r_0 (рис. 44). Частицы, находящиеся на этой окружности, первоначально находятся в состоянии равновесия относительно земной поверхности. Следовательно,

$$A_0 = \pi r_0^2 \sin \lambda,$$

где λ является широтой и

$$J_0 = 0.$$

Если происходит возмущение (например, воздушная тяга к центру окружности), то частицы через некоторое время займут замкнутую кривую, подобную окружности радиуса r . В этом новом положении получим следующие соотношения

$$A = \pi r^2 \sin \lambda,$$

$$J = 2\omega_0 \pi (r^2 - r_0^2) \sin \lambda.$$

Пусть имеется вращение, а ω — его угловая скорость или вертикальная составляющая вихря. Вычисляя интеграл

$$J = 2 \int \omega d\sigma,$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности при условии, что ω является постоянной, получим

$$J = 2\omega \int d\sigma = 2\omega \pi r^2.$$

Приравнявая два выражения для J , находим

$$\omega = \omega_0 \sin \lambda \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right).$$

Если отношение $\frac{r}{r_0}$ достаточно мало, то ω станет очень большой и всегда будет иметь один и тот же знак, т.е. вращение всегда будет направлено в одну и ту же сторону.

Это и есть одно из объяснений образования атмосферных циклонов.